Parametrización del oscilador armónico

Marco Antonio Ortiz Castillo y Arturo Alejandro Gallardo Lozada

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas del IPN.

Av. Instituto Politécnico Nacional 2580, Barrio la Laguna Ticomán, 07340, Gustavo A. Madero

Ciudad de México, México.

January 15, 2016

Abstract

En este trabajo se realiza el estudio del oscilador armónico simple unidimensional como muestra del proceso de reparametrización de un sistema mecánico. Se realiza el análisis del sistema del oscilador armónico mediante el método canónico de Dirac para encontrar que el hamiltoniano de un sistema reparametrizado es nulo y que la dinámica del sistema está contenida enteramente en las constricciones del sistema.

1 Introducción

Los sistemas híbridos engloban un extenso conjunto de sistemas que exhibe un comportamiento tanto continuo como discreto. Estos sistemas se encuentran en diversos problemas de ingeniería como telecomunicaciones, ingeniería de energía, robótica, etc. [1]. Estos sistemas son ampliamente usados en modelado y en teoría de control [2]. Uno de los métodos propuestos para la solución de los sistemas híbridos con constricciones unilaterales es la reparametrización temporal [3]. Tales modelos surgen, por ejemplo, en problemas de control en sistemas mecánicos donde trayectorias pueden tener solamente una discontinuidad en el límite de un dominio dado [4].

Por un lado, el objetivo del estudio de este trabajo es introducir brevemente a la reparametrización de sistemas mecánicos simples para su implementación futura a problemas más complejos de teoría de control. Por otro lado, se desea mostrar el análisis de modelos mecánicos usando el método canónico de Dirac el cual es completamente sistemático y dá información sin resolver las ecuaciones de movimiento del sistema.

Para los objetivos mencionados anteriormente se tomará el oscilador armónico simple unidimensional, por ejemplo el péndulo simple, el cual consiste de una masa m suspendia desde un punto fijo O mediante una cuerda inextensible de longitud l y de masa despresiable inmersa en un campo gravitotorio. Para ángulos o perturbaciones pequeñas el pincipio de acción lagrangiano del oscilador armónico es [5]:

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right] dt \qquad (1)$$

donde q es la coordenada generalizada del espacio de configuraciones, $q = \theta$ donde θ es el ángulo de apertura, y ω es la frecuencia angular del movimiento. La variación del principio de acción genera la ecuación de movimiento usual:

$$\delta S[q] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{q}^2 + \omega^2 q = 0 \qquad (2)$$

Como es bien sabido la solución a esta ecuación diferencial es $q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, donde A se la llamada amplitud de la oscilación, ω es la frecuencia angular, la cual, en términos de las variables del sistema es $\omega^2 = \frac{g}{l}$ y φ es la fase del movimiento.

2 Reparametrización del oscilador armónico

Se considera el oscilador armónico simple unidimensional como ejemplo de la parametrización temporal de un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad. Como sabemos el péndulo simple posee un solo grado de libertar. El oscilador armónico es descrito por el principio de acción:

$$S[q] := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - m\omega^2 q^2 \right]. \tag{3}$$

Para reparametrizar el principio de acción (3) se considera al tiempo como función de un nuevo parámetro arbitrario τ con la única restricción de que éste sea monótono creciente, i.e.,

$$t = t(\tau), \tag{4}$$

Con este nuevo parámetro de evolución las derivadas de evolución deben expresarse en términos de él, es decir, se debe cambiar $\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d\tau}$. Con esto y por la regla de la cadena se expresa el principio de acción (3) en términos de este nuevo parámetro,

$$S[q,t] := \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{t} \left[m\left(\frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - m\omega^2 q^2 \right]. \tag{5}$$

Donde se ha expresado las derivadas respecto al parámetro con un punto, esto es, $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}$ y $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$. Por un lado, se puede observar que el principio de acción depende ahora no solo de q sino también de t, es decir, el tiempo se ha convertido en una variable dinámica y no es más un parámetro y por lo tanto la función lagrangiana posee velocidades de t. Por otro lado, se debe expresar el principio de acción en términos de las variables de configuración y sus velocidades, por lo que es necesario tomar en cuenta que $\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}$. De esta manera el principio de acción (5) se transforma en :

$$S[q,t] := \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[m\frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - m\omega^2 q^2 \dot{t} \right] \tag{6}$$

3 Análisis canónico del oscilador armónico reparametrizado

Para iniciar el análisis canónico [6] definimos los momentos canónicamente conjugados a las variables de configuración, es decir,

$$\begin{aligned} \pi_q &:= \frac{\delta S}{\delta \dot{q}} = m\frac{\dot{q}}{\dot{t}} \\ \pi_t &:= \frac{\delta S}{\delta \dot{t}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}}{\dot{t}}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Como se puede observar el momento π_t contiene tanto la velocidad de t como la velocidad de q, por lo tanto, son dependientes la una de la otra y por ello no se puede realizar la transformación de Legendre de la manera usual para construir la función hamiltoniana, es decir, no se pueden despejar las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos. Por lo que, para construir el hamiltoniano se sigue de la siguiente manera: se introducen los momentos dentro de la definición de hamiltoniano, $H_0 = \pi_1 q^i - L(q^i, \pi_i)$ y se reduce la función, esto es:

$$H_0 := \pi_q \dot{q} + \pi_t \dot{t} - \mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - \frac{\dot{q}^2}{2\dot{t}} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \dot{t} - \frac{1}{2}\left(m\frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} - m\omega^2 q^2 \dot{t} \right) \tag{8}$$

Reduciendo la función es directo observar que el hamiltoniano canónico es nulo, esto aunque extraño no es inesperado ya que ésta es una propiedad de las teorías paramétricas [7][8] y lo que indica es que toda la dinámica reside en las constricciones y por ello el hamiltoniano canónico es cero, i.e.

$$H_c = 0. \tag{9}$$

Para hallar la constricción del sistema lo que se realiza es despejar la velocidad del momento π_q, $\dot{q} = \frac{1}{m}\pi_q \dot{t}$, e introducirlo en el momento π_t, de manera que los momentos son relacionados por:

$$\pi_t = -\frac{1}{2m}\pi_q^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Por lo anterior se llega a la conclusión de que los momentos canónicos son linealmente dependiente y por lo tanto, existe al menos una constricción primaria. La constricción que se encuentra está dada por:

$$\phi := \pi_t + \frac{1}{2m}\left(\pi_q^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \approx 0. \tag{10}$$

Con esta información el principio de acción total del oscilador armónico parametrizado es expresado como:

$$S[q,t;\lambda] := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\pi_q \dot{q} + \pi_t \dot{t} - \lambda\phi\right]. \tag{11}$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Esto indica que el hamiltoniano total es compuesto por puras constricciones, $H_T = \lambda\phi$. La variación del principio de acción (10) da como resultado

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\delta\pi_q\left(\dot{q} - \frac{\lambda}{m}\pi_q\right) + \delta\pi_t\left(\dot{t} - \lambda\right) + \delta q\left(-\dot{\pi}_q - m\lambda\omega^2 q\right) - \delta t\left(-\dot{\pi}_t\right) + \delta\lambda\left(-\phi\right)\right] + TF. \tag{12}$$

donde TF son los términos de frontera que surgieron al realizar la variación. Aplicando el principio de Hamilton y considerando las condiones de frontera apropiadas se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{array}{lll} \dot{q} = \frac{\lambda}{m}\pi_q, & \dot{t} = \lambda, & \phi = 0, \\ \dot{\pi}_q = -m\lambda\omega^2 q, & \dot{\pi}_t = 0. & \end{array} \tag{13}$$

Para continuar con el método de Dirac se debe evolucionar la constricción primaria respecto del parámetro τ, es decir $\dot{\phi} = 0$. La frase "evolucionar la constricción" quiere indicar que como la constricción es igual a cero, (10), ésta debe seguir siendo cero en cualquier tiempo. Por lo anterior y usando las ecuaciones de movimiento se tiene que :

$$\dot{\phi} := \dot{\pi} + \frac{1}{m}\pi_q\dot{\pi}_q + m\omega^2 q\dot{q} = 0, \tag{14}$$

es decir, la constricción es conservada y se concluye que no existen más constricciones, además como la constricción cierra el álgebra decimos que ésta es una constricción de primera clase. Finalmente, se realiza el conteo de grados de libertad, $NGL = \frac{1}{2}\left(2N - \mathcal{A} - 2A\right)$, y como tenemos dos variables de configuración $N = 2$, una constricción de primera clase $A = 1$ y cero constricciones de segunda clase $\mathcal{A} = 0$, se tiene que el sistema posee

$$NGL = \frac{1}{2}(4 - 0 - 2 * 1) = 1 \tag{15}$$

grado de libertad, tal y como que corresponde al sistema. Y con esto se finaliza el análisis canónico del sistema del oscilador armónico reparametrizado.

4 Conclusiones

Por un lado, como se pudo observar la reparametrización de un sistema puede cambiar en gran medida la forma de ver y tratar a un sistema, y esta nueva perspectiva puede hacer mas sencillo el resolver las ecuaciones u obtener información extra que no era fácil observar con la teoría usual. Por ejemplo, en el caso usual del oscilador armónico solo existe una variable de configuracion q, el hamiltoniano simpre es la energía total del oscilador entre otros hechos, sin embargo en el caso reparametrizado todo esto cambia ya que ahora existen dos variables de configuración, (q, t), el hamiltoniano del sistema es nulo, aparece una constricción y por lo tanto un multiplicador de Lagrange. Sin embargo, aunque se "vea" diferente las propiedades intrínsecas del sistema sigue siendo un oscilador armónico simple y debe conservar el número de grados de libertad lo cual se comprobo en (15).

Por otro lado, se pudo observar que el método canónico de Dirac es completamente sistemático y va revelando todas las propiedades del principio de acción de un sistema con constricciones dado, por lo cual puede ser un buen método de análisis en los problemas de control y en general en problemas de ingeniería de sistemas con constricciones.

References

[1] Boccadoro M, et al.,(2005) "Optimal Control of Switching Surfaces in Hybrid Dynamical Systems", Discrete Event Dynamic Systems-Theory and Applications **15** (4), 433.

[2] Arkin R, (1998) "Behavior Based Robotics" (MIT Press).

[3] Miller B y Rubinovich E, (2005) "Optimization of Dynamic Systems with Impulse Controls" (Nauka, Moscow.

[4] Goncharova E y Staritsyn V, (2011)"Time Reparameterization in Problems of Optimal Control of Impulsive Hybrid Systems" Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya, **3**, 41.

[5] Marion J B, (1975) "Dinámica Clásica de Partículas y Sistemas", Ed Reverte.

[6] Dirac PAM,(1950) "Generalized Hamiltonian dynamics" Can. J. Math. **2**, 129; (1951) "The Hamiltonian form of field dynamics" Can. J. Math. **3**, 1 y (1964) "Lectures on Quantum Mechanics" (Belfer Graduate School of Science, New York).

[7] Henneaux M, Teitelboim C y Vergara V, (1992) "Gauge Invariance for Generally Covariant Systems"Nucl. Phys. B **387**, 391 .

[8] Montesinos M y Vergara J, (2001) "Gauge Invariance of Complex General Relativity" Gen. Relativ. Gravit. **33**, 921.