

---

## CONTROL DE POSICIÓN SATURADO PARA UN ROBOT MÓVIL CON RUEDAS TIPO DIFERENCIAL

*Erik Reyes Reyes<sup>1</sup>*  
*Rogelio Ernesto García Chavez<sup>1</sup>*  
*Ángel Adrián Orta Quintanal<sup>1</sup>*  
*Ramón Silva Ortigoza<sup>1</sup>*  
*Magdalena Marciano Melchor<sup>1</sup>*  
*Emilio Mendoza Ruiz<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup> Instituto Politécnico Nacional  
CIDETEC  
Laboratorio de Mecatrónica y Energía Renovable  
Unidad Profesional Adolfo López Mateos  
C.P. 07700, Ciudad de México, México*

*<sup>2</sup> Instituto Politécnico Nacional  
CECYT No. 11 "Wilfrido Massieu"  
C.P. 11350, Ciudad de México, México*

### *Resumen*

En este trabajo se presenta un control de posición saturado para un robot móvil tipo diferencial, el controlador se diseña empleando la teoría de estabilidad para sistema dinámicos de Lyapunov. El algoritmo propuesto hace uso del error de posición del robot con respecto a una coordenada meta para generar salidas acotadas mediante el uso de una función saturada, la cual es novedosa. Los resultados de simulación en Matlab-Simulink muestran que el control saturado resuelve la tarea de una manera satisfactoria, demostrando la eficiencia del controlador.

### **1. Introducción**

Los robots móviles son sistemas mecatrónicos que cuentan con un amplio rango de aplicaciones [1]. Particularmente, los robots móviles con ruedas han cobrado un auge importante en usos comerciales, industriales y de investigación. Por otra parte, el diseño de controladores de posición para un robot móvil con ruedas tipo diferencial representa una tarea de interés debido a que el robot tipo diferencial es un sistema no holónimo. Si bien, se han presentado controladores que ejecutan la tarea de control de posición [2], [3]. Ninguno de ellos, a buen conocimiento de los autores emplea esquemas saturados en su naturaleza matemática. El uso de dichos esquemas tiene como objetivo limitar el valor de las entradas de control para el robot móvil. Esto representa una ventaja en la aplicación del algoritmo, ya que generalmente las variables de control del robot móvil son la velocidad lineal y la velocidad angular del propio robot. Estas velocidades son construidas a partir de las velocidades angulares de los

actuadores. La naturaleza matemática del algoritmo limita las entradas de control e impone una cota superior para el valor máximo de las mismas. Esta cota es menor o igual a la máxima velocidad lineal y angular que puedan generar los actuadores, permitiendo así, mejor uso energético y evitando que los actuadores trabajen en sus límites físicos. En esa dirección, este trabajo presenta un control de posición saturado para un robot móvil tipo diferencial.

El resto del trabajo se estructura de la siguiente manera: la Sección 2 muestra las generalidades del sistema. En la Sección 3 se dan las especificaciones para el control de posición. La Sección 4 presenta los resultados de simulación del sistema en lazo cerrado. Por último, las conclusiones son dadas en la Sección 5.

## 2. Robot móvil con ruedas tipo diferencial

El robot móvil tipo diferencial, mostrado en la Fig. 1. Es un robot móvil con ruedas cuyo movimiento se genera por dos ruedas motrices situadas en cada lado del chasis del robot. En la Fig. 1.  $v$  y  $\omega$  corresponde a la velocidad lineal y angular respectivamente,  $\varphi$  corresponde al ángulo de orientación del robot. Mientras que  $(x, y)$ ,  $l$  y  $r$  son las coordenadas del punto del eje central que une a ambas ruedas, la distancia del centro de las ruedas al punto central y el radio de las ruedas respectivamente.

Considerando lo anterior, el modelo dinámico del robot móvil tipo diferencial se expresa de la siguiente manera [4].

$$\dot{x} = v \cos \varphi, \quad (1)$$

$$\dot{y} = v \sin \varphi, \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad (3)$$

Sin embargo, el modelo cinemático descrito en las ecuaciones (1)-(3), presenta una relación no invertible entre las entradas de control  $(v, \varphi)$  y las salidas  $(\dot{x}, \dot{y})$ . Para solucionar esto se considera que el punto de interés se desplaza hacia la parte delantera una distancia  $L$ . El nuevo punto de interés se define por las coordenadas  $(x_r, y_r)$ , las cuales se expresan de la siguiente manera.

$$x_r = x + L \cos \varphi, \quad (4)$$

$$y_r = y + L \sin \varphi, \quad (5)$$

Derivando las ecuaciones (4), (5) con respecto al tiempo y sustituyendo los valores de las ecuaciones (1), (2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix} = J(\varphi) \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde  $J(\varphi)$  es una matriz jacobiana e invertible para todo valor de  $\varphi$ . Definida por:

$$J(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -L \sin \varphi \\ \sin \varphi & L \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (7)$$

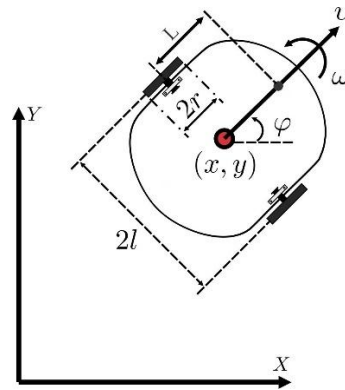


Figura 1. Robot móvil tipo diferencial en plano XY.

### 3. Control de posición con estructura saturada

El problema de control de posición de robots móviles, es un caso particular del problema de general denominado control de trayectoria. El problema de control de posición consiste en diseñar un regulador tal que la coordenada de interés del robot  $(x_r, y_r)$  del robot móvil converja hacia la coordenada deseada  $(x_d, y_d)$ , cuando el tiempo evoluciona, sin importar las condiciones iniciales, es decir:  $(x_r, y_r) \rightarrow (x_d, y_d)$ .

Para lograr tal objetivo partimos definiendo el error de posición como se muestra a continuación:

$$e = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix}, \quad (8)$$

Derivando el error de posición definido en la ecuación (8) con respecto al tiempo obtenemos como resultado:

$$\dot{e} = - \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Expresando la ecuación (6) en términos de la derivada del error y haciendo uso de la relación invertible entre  $(\dot{x}_r, \dot{y}_r)$  y  $(v, \omega)$  obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J^{-1}(\varphi)(-\dot{e}), \quad (10)$$

Partiendo de la ecuación (10), se elabora el diseño del controlador de posición empleando el método de Lyapunov. Para esto, se propone una función candidata de la siguiente forma:

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T I e, \quad (11)$$

donde  $I$  es la matriz identidad, por consiguiente  $V(e) = e^T I e > 0$  ya que cumple con el criterio de Sylvester. Derivando (11) con respecto del tiempo se tiene:

$$\dot{V}(e) = e^T \dot{e}, \quad (12)$$

Para que (12) cumpla con el criterio de Lyapunov debe ser radialmente definida negativa, para cumplir con la condición se propone a  $\dot{e}$  de la siguiente manera:

$$\dot{e} = -Kp \left( \frac{\arctan(e)}{\sqrt{1+\tanh^2(e)}} \right), \quad (13)$$

donde  $Kp$  es una matriz diagonal, cuyos elementos son mayores a cero. La grafica del cociente se muestra en la Fig. 2.

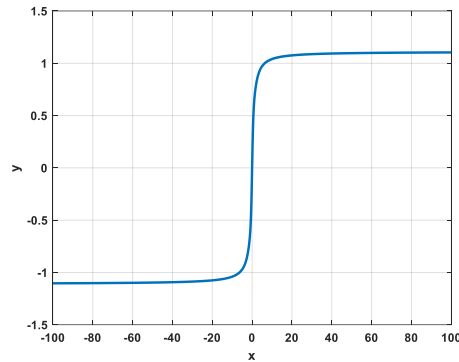


Figura 2. Gráfica del cociente

Sustituyendo (13) en (12) obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{V}(e) = e^T Kp \left( \frac{\arctan(e)}{\sqrt{1+\tanh^2(e)}} \right) < 0, \quad (14)$$

Por lo tanto, el sistema es asintóticamente estable. Tomando en cuenta (13) y reemplazando el valor de  $\dot{e}$  en (10) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} v_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = J^{-1}(\varphi) Kp \left( \frac{\arctan(e)}{\sqrt{1+\tanh^2(e)}} \right). \quad (14)$$

La expresión (14) describe el controlador de posición propuesto, el cual genera perfiles de velocidad lineal y angular  $(v_{ref}, \varphi_{ref})$ , estos perfiles sirven como entradas de control para el robot móvil considerando que  $(v, \varphi) = (v_{ref}, \varphi_{ref})$ .

#### 4. Simulación

La simulación del control de posición saturado definido en (14), se realizó en Matlab-Simulink. Este, se muestra en la Fig. 3.

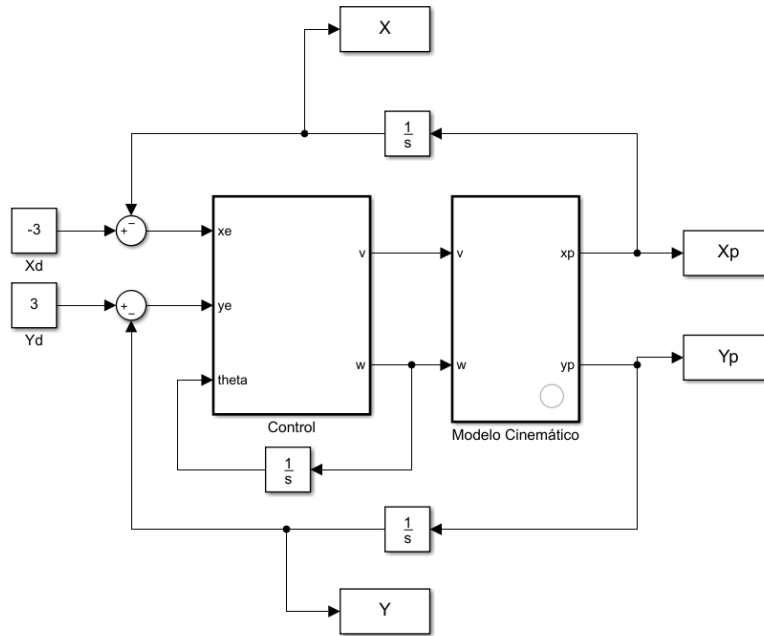


Figura 3. Simulación del control de posición en Matlab-Simulink.

La simulación se realizó empleando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden, empleando un tiempo de muestreo fijo de 2.5 mili segundos. Los valores de la matriz de ganancias  $Kp$  y los valores de la distancia  $L$  se muestra a continuación:

$$kp1 = 0.5, \quad kp2 = 0.5, \quad L = 0.1m$$

De la Fig. 4. Se observa que el control de posición resuelve exitosamente la tarea de regulación, ya que  $(x_r, y_r) \rightarrow (x_d, y_d)$ . Los valores de la coordenada deseada son  $(x_r, y_r) = (-3,3)$ . Además, es notorio que la gráfica de los errores en el eje X y en el eje Y tienden a cero como se demostró teóricamente en la sección 3.

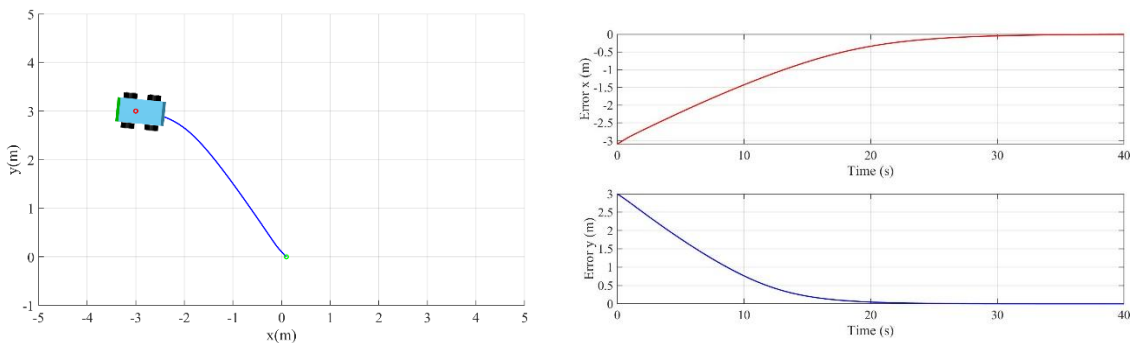


Figura 4. Resultados de la simulación de posición en Matlab-Simulink.

### 5. Conclusiones

---

En este trabajo se abordó el diseño de un controlador de posición saturado para un robot móvil tipo diferencial, haciendo uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Todo lo anterior es fácilmente programable con Simulink-Matlab. Los resultados de simulación muestran que el control de posición logra el objetivo deseado, validando la estrategia de control propuesto y la teoría que lo respalda.

### Referencias

- [1] Leonimer Flávio De Melo Alves, Silas Franco dos Reis y Rosário João Maurício, "Mobile Robot navigation modelling, control and applications," International Review on Modelling and Simulations, vol. 5, no. 2, pp. 1059-1068, 2012
- [2] Yongoug Chung, Chongkug Park y F. Harashima, "A position control differential drive wheeled mobile robot," in IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 48, no. 4, pp. 853-863, 2001.
- [3] P. K. Padhy, T. Sasaki, S. Nakamura y H. Hashimoto, "Modeling and position control of mobile robot," 2010 11th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control (AMC), 2010, pp. 100-105.
- [4] A. Yacine, C. Fatima y B. Aissa, "Trajectory tracking control of a wheeled mobile robot using an ADALINE neural network," 2015 4th International Conference on Electrical Engineering (ICEE), 2015, pp. 1-5.