Boletín No. 100 · 1º de enero de 2024

# IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS PARA UN MOTOR DE CD

Alfredo Roldán Caballero[1] Edgar Alfredo Portilla Flores[1] Roberto Sánchez Sánchez[1,2]
[1]Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Tlaxcala
[2]Instituto Politécnico Nacional
Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo

## Resumen

En el presente trabajo se muestra una aplicación de identificación de parámetros para sistemas dinámicos lineales. Específicamente, se obtienen los parámetros de un motor de CD mediante el método de mínimos cuadrados. Utilizando identificación de parámetros se obtiene un modelo reducido de primer orden del motor de CD, a partir de un modelo de segundo orden. Para llevar a cabo la identificación de parámetros del motor de CD, se realiza una simulación numérica utilizando Matlab-Simulink.

### 1. Introducción

Los sistemas dinámicos, regularmente, son descritos por ecuaciones diferenciales. Para sistemas dinámicos lineales, las ecuaciones diferenciales se pueden describir de la forma

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u.$$

Los parámetros $\bar{A}$ y $\bar{B}$ se obtienen mediante las propiedades físicas del sistema. Sin embargo, en ocasiones es complicado o muy caro conocer dichos parámetros. Por lo tanto, mediante algún método de identificación de parámetros, conociendo el estado $x$ y la entrada $u$, se pueden estimar las constantes $A$ y $B$.

En este trabajo se describe la identificación de parámetros mediante el método de mínimos cuadrados, aplicados a la identificación de un motor de CD. En la Sección 2 se describe el método de mínimos cuadrados para sistemas lineales. Mientras que en la Sección 3 se realiza la implementación de identificación de parámetros en un motor de CD, mediante el uso de Matlab-Simulink. Por último, en la Sección 4 se presenta la conclusión del resultado obtenido en el presente trabajo.

### 2. Método de mínimos cuadrados para sistemas lineales

Un sistema lineal se puede describir por medio de ecuaciones en espacio de estado (Ogata, 1987), dadas por

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u, \tag{1}$$

siendo $x$ el vector de estado, $u$ el vector de entradas, mientras $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los parámetros constantes del sistema. El sistema (1), al ser medido se discretiza (Ogata, 1996) obteniendo las ecuaciones en diferencias

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \tag{2}$$

Para conocer los parámetros $A$ y $B$, en el presente trabajo se utilizará el método de identificación de parámetros propuesto en (Poznyak, 2007), donde (2) se reescribe de la forma

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}}_{z_k}, \qquad x_{k+1} = Cz_k. \tag{3}$$

Por lo que la suma de los errores cuadráticos resulta

$$e = \sum_{k=0}^{n} \|x_{k+1} - C z_k\|^2. \tag{4}$$

Para encontrar el mínimo error, es necesario derivar con respecto a $C$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dC}e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dC}\|x_{k+1}\|^2 - 2\frac{d}{dC}x_{k+1}^{\top} C z_k + \frac{d}{dC}\|C z_k\|^2 = 0,\\
\frac{d}{dC}e &= -2\frac{d}{dC}\sum_{k=0}^{n} x_{k+1}^{\top} C z_k + \frac{d}{dC}\sum_{k=0}^{n}\|C z_k\|^2 = 0,\\
\frac{d}{dC}e &= -2\frac{d}{dC}\,\mathrm{tr}\left(C\sum_{k=0}^{n} z_k x_{k+1}^{\top}\right) + \frac{d}{dC}\,\mathrm{tr}\left(C^{\top} C \sum_{k=0}^{n} z_k z_k^{\top}\right) = 0,\\
\frac{d}{dC}e &= -2V_n^{\top} + 2 C Z_n = 0.
\end{aligned}$$

Definiendo

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} z_k x_{k+1}^{\top}, \qquad Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k z_k^{\top}, \tag{5}$$

por lo tanto, la matriz de parámetros resulta

$$C = V_n^{\top} Z_n^{-1}. \tag{6}$$

## 3. Implementación del método de identificación de parámetros en un motor de CD

La identificación de parámetros permite encontrar las características físicas de un sistema, para este trabajo un motor de CD. Un motor de CD se puede modelar de acuerdo con la Figura 1.

**Figura 1 Diagrama del motor de CD.**

Mientras tanto, el modelo matemático del motor se expresa mediante las siguientes ecuaciones diferenciales (García-Rodríguez et al., 2018):

$$L_a \frac{di_a}{dt} = E - R_a i_a - k_e \omega, \tag{7}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_m i_a - b\omega, \tag{8}$$

donde $k_m$ y $k_e$ son las constantes del motor y contra electromotriz respectivamente, mientras $J$ es la inercia y $b$ es la constante de fricción, $E$ es el voltaje de alimentación, $R_a$ es la resistencia, $L_a$ la inductancia, $i_a$ la corriente y $\omega$ la velocidad angular del motor de CD. El modelo (7) y (8) se puede reescribir en espacio de estado de la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{di_a}{dt} \\ \dfrac{d\omega}{dt} \end{pmatrix}}_{\dot{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{k_e}{L_a} \\ \dfrac{k_m}{J} & -\dfrac{b}{J} \end{pmatrix}}_{\bar{A}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} i_a \\ \omega \end{pmatrix}}_{x_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{B}_1} \underbrace{E}_{u} \tag{9}$$

Observe que las matrices $\bar{A}_1$ y $\bar{B}_1$ contienen las constantes físicas del sistema. Mediante el método de identificación de parámetros se buscará obtener el modelo reducido del modelo (9), propuesto en (García-Sánchez et al., 2018), descrito por

$$\frac{d\omega}{dt} = -\underbrace{\zeta}_{\bar{A}}\underbrace{\omega}_{x} + \underbrace{\phi}_{\bar{B}}\underbrace{E}_{u}. \tag{10}$$

Observe que al utilizar (10), se desconocerán los parámetros $\bar{A}$ y $\bar{B}$, los cuales serán estimados mediante mínimos cuadrados. Para la implementación en Matlab-Simulink se seleccionan las constantes de (9) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_a &= 1 \times 10^{-4}, & k_m &= 1.5\ \tfrac{\text{N·m}}{\text{A}}, \\ R_a &= 1.6\ \Omega, & k_e &= 1.5\ \tfrac{\text{V·s}}{\text{rad}}, \\ J &= 320 \times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2, & b &= 210 \times 10^{-3}\ \tfrac{\text{N·m·s}}{\text{rad}}. \end{aligned} \tag{11}$$

A fin de simular el comportamiento del motor, el modelo (9) se programa con los parámetros (11), mediante el diagrama de bloque de la Figura 2, para obtener los datos del estado $x_1$ y la entrada $u$ del motor de CD.

**Figura 2 Diagrama de bloques en Simulink para el modelo del motor de CD.**

El diagrama de bloques de la Figura 2 permite obtener las señales discretas $x_{1k}$ y $u_k$, mediante el método de Euler y un tiempo de muestreo $\tau = \frac{1}{10000}$ s. Observe que, para identificar los parámetros del modelo reducido, solamente es necesario medir $u_k$ y parte del estado, es decir $x_{1k}^{(1)} = \omega_k = x_k$. Una vez obtenidos los datos $x_k$ y $u_k$, para la identificación de parámetros, se procede a implementar en Matlab el método de mínimos cuadrados (6) mediante el Programa 1.

**Listing 1 Implementación del método de mínimos cuadrados para identificación de parámetros.**

```
w = out.w(:,1)';            for k = 1:n-1
E = out.E(:,1)';                Vn = Vn + (z(:,k)*x(:,k+1)');
u = E;                          Zn = Zn + (z(:,k)*z(:,k)');
x = w;
z = [x; u];                     C = Vn'*inv(Zn);
n = size(w);                end
n = n(2);
Vn = zeros(size(z(:,1)*x(:,1)')); A = C(1);
Zn = zeros(size(z(:,1)*z(:,1)')); B = C(2);
```

Una vez ejecutado el Programa 1, se obtienen los parámetros del modelo discreto, expresado como en (2), de la siguiente forma:

$$A = 0.9950, \quad B = 0.0029. \tag{12}$$

De acuerdo con el método de discretización de Euler (Åström & Wittenmark, 1997), los parámetros discretos de (2), a través de los parámetros continuos de (1), son:

$$A = \tau\bar{A} + I, \qquad B = \tau\bar{B}. \tag{13}$$

Por lo tanto,

$$\bar{A} = \frac{1}{\tau}(A - I), \qquad \bar{B} = \frac{1}{\tau}B, \tag{14}$$

con los resultados (12), se obtiene

$$\bar{A} = -50, \qquad \bar{B} = 29. \tag{15}$$

Entonces, los parámetros del modelo (10) resultan

$$\zeta = 50, \qquad \phi = 29, \tag{16}$$

siendo el modelo reducido del motor de CD

$$\frac{d\omega}{dt} = -50\omega + 29E. \tag{17}$$

### 4. Conclusiones

En el presente trabajo se obtuvo el modelo de primer orden de un motor de CD, mediante la implementación en Matlab-Simulink del modelo de segundo orden del motor de CD y el método de identificación de parámetros. El desarrollo muestra dos aportes importantes: la reducción de un modelo de segundo orden y la implementación del método de identificación de parámetros. Primero, al reducir el orden del modelo que representa el motor de CD se logra, entre otros objetivos, simplificar el diseño de un control para la velocidad angular $\omega$. Segundo, la implementación de la identificación de parámetros ilustra el método mediante el cual se pueden obtener todas las constantes de cualquier modelo lineal de un sistema dinámico. Lo anterior permite realizar análisis matemático sobre los sistemas dinámicos, como puntos de equilibrio, controlabilidad, observabilidad, etc. De igual forma, conocer todos los parámetros del sistema permite realizar diseño de controladores basados en el modelo matemático, como retroalimentación del vector de estado, controles pasivos, planitud diferencial, entre otros.

## Referencias

Åström, K., & Wittenmark, B. (1997). *Computer-Controlled Systems Theory and Design*. Prentice Hall.

García-Rodríguez, V. H., Silva-Ortigoza, R., Hernández-Márquez, E., García-Sánchez, J. R., & Taud, H. (2018). DC/DC Boost Converter--Inverter as Driver for a DC Motor: Modeling and Experimental Verification. *Energies*, *11*(8), 1--15.

García-Sánchez, J., Tavera-Mosqueda, S., Silva-Ortigoza, R., Hernández-Guzmán, V., Sandoval-Gutiérrez, J., Marcelino-Aranda, M., ... & Marciano-Melchor, M. (2018). Robust Switched Tracking Control for Wheeled Mobile Robots Considering the Actuators and Drivers. *Sensors*, *2018*(18), 21.

Ogata, K. (1987). *Dinámica de Sistemas*. Prentice-Hall Hispanoamericana.

Ogata, K. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice-Hall Hispanoamericana.

Poznyak, A. (2007). *Least Squares Method for Dynamic Systems Identification*. México, D.F.