
DE LA EQUIVALENCIA FORMAL ENTRE LAS LEYES DINÁMICAS DE LA ÓPTICA CLÁSICA Y DE LOS SISTEMAS MECÁNICOS

Sara Cruz y Cruz*

Rubén Razo *

sgcruz@ipn.mx,

SEPI-UPIITA,

Instituto Politécnico Nacional

Abstract

Se consideran las analogías entre los sistemas ópticos y mecánicos desde el punto de vista tanto de la óptica de rayos y la mecánica Newtoniana, como de la óptica ondulatoria y la mecánica cuántica. Se presenta la construcción de la formulación Hamiltoniana de la óptica geométrica, así como la de un análogo electromagnético de la ecuación de Schrödinger estacionaria.

I. Introducción

Las analogías entre los procesos de propagación de la luz y la dinámica de sistemas mecánicos han sido tema de interés a lo largo de la historia. En particular, el principio de Fermat, que codifica el comportamiento de un haz de luz en el régimen de la óptica geométrica, conduce a una ley dinámica, la ecuación de rayos, que tiene una semejanza evidente con la dinámica Newtoniana [Evans 86]. Una de las ventajas de estas similitudes es que su uso permite una reducción considerable en la complejidad matemática de muchos problemas de la óptica geométrica en medios de índice de refracción gradual. Por otro lado, a partir del principio de Fermat es posible establecer una formulación Hamiltoniana de la óptica de rayos, la óptica geométrica en el espacio fase [Wolf 04], que describe la forma del rayo de luz en función de la distancia a lo largo del eje óptico del sistema. En el régimen paraxial, es decir, en el caso en el que la dirección del rayo no difiere significativamente de la dirección definida por el eje óptico, este formalismo es equivalente a la descripción Hamiltoniana de la mecánica clásica.

Las analogías entre los sistemas ópticos y mecánicos se extienden también al régimen de la óptica ondulatoria y la mecánica cuántica [Dragoman 04, Longhi 09] debido a la equivalencia formal entre la ecuación escalar de Helmholtz, que describe la propagación espacial de un haz de luz en el régimen paraxial, y la ecuación de Schrödinger, que gobierna la evolución temporal de una partícula cuántica en un potencial de interacción [Lax 75, Marte 97, Cruz y Cruz 15a]. Esta equivalencia se ha usado como herramienta para simular, por medio de sistemas ópticos, múltiples procesos que involucran sistemas cuánticos, tales como control coherente del tunelamiento cuántico [Longhi05], oscilaciones de Rabi [Muga 06], colapsos y resurgimientos cuánticos [Longhi 08], entre otros. Así mismo, algunos formalismos de la mecánica cuántica

han sido adaptados para la descripción de procesos de propagación electromagnética, tanto en espacio libre como en dispositivos ópticos [Gloge 69, Stoler 81, Deutch 91, van Enk 92].

El propósito de este trabajo es abordar la equivalencia formal entre las leyes dinámicas que gobiernan el comportamiento de los sistemas ópticos y mecánicos. En particular, en la Sección II se presenta la construcción de la formulación Hamiltoniana de la óptica de rayos, mientras que en la Sección III se describe el análogo electromagnético de la ecuación de Schrödinger estacionaria en el régimen paraxial. El trabajo se cierra con algunas conclusiones.

II. Formulación Hamiltoniana de la óptica de rayos Es bien sabido que los fenómenos ópticos asociados a la propagación de ondas electromagnéticas de longitud de onda en el espectro visible se pueden describir, en una buena aproximación, considerando que la luz viaja en forma de rayos que apuntan en la dirección del flujo de energía electromagnética. En esta descripción, la forma en la que la luz se propaga a través de diferentes medios ópticos queda determinada por un conjunto de reglas geométricas basadas en el principio de Fermat [Saleh 07]. Un medio óptico está caracterizado por un número n , conocido como índice de refracción, que es la razón entre la rapidez de la luz en el espacio libre y la correspondiente en el medio. Si el material es no homogéneo el índice de refracción depende del vector de posición \mathbf{q} . El tiempo que le toma a la luz viajar de un punto P_1 a un punto P_2 a través de ese medio es proporcional a la llamada "Longitud de Camino Óptico" dada por la integral

$$LCO = \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{q}) ds$$

donde ds es el elemento diferencial de longitud de arco a lo largo de la trayectoria. El principio de Fermat establece que los rayos ópticos siguen caminos de tiempo mínimo. Este principio, expresado en la forma variacional $\delta LCO=0$ conduce a la ley dinámica conocida como ecuación de rayos

$$\frac{d}{ds} \left[n(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{q})$$

Observe la semejanza de esta ecuación con la segunda ley de Newton $F = dp/dt = -\nabla V(\mathbf{q})$ para una partícula puntual con momento lineal p sometida a la acción de un campo de fuerzas F derivable de un potencial $V(\mathbf{q})$. Así, en la ecuación de rayos el índice de refracción se puede interpretar como el negativo del potencial óptico que determina la dinámica del rayo de luz y la cantidad $n(\mathbf{q}) d\mathbf{q}/ds$ como el momento lineal del rayo.

Consideremos un rayo de luz representado por la trayectoria C (ver Figura 1) parametrizada por el vector de posición $\mathbf{q}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, con $s \in \mathbb{R}$ la longitud de arco a lo largo de C . La derivada $d\mathbf{q}/ds$ será un vector unitario tangente al rayo en cada punto $\mathbf{q}(s)$, excepto, quizás, en algunos puntos aislados en los cuales la derivada no esté bien definida. De esta forma la norma del vector de momento lineal del rayo está asociada con el índice de refracción ($|\mathbf{p}| = n(\mathbf{q})$) y su dirección con la dirección del rayo en cada punto de la trayectoria. El conjunto de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla n(\mathbf{q})$$

se puede escribir en la forma Hamiltoniana [Wolf04]

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial}{\partial p_i} H_s(\mathbf{q}, \mathbf{p}; s), \quad \frac{dp_i}{ds} = - \frac{\partial}{\partial q_i} H_s(\mathbf{q}, \mathbf{p}; s), \quad q_i = x, y, z, \quad p_i = p_x, p_y, p_z$$

con

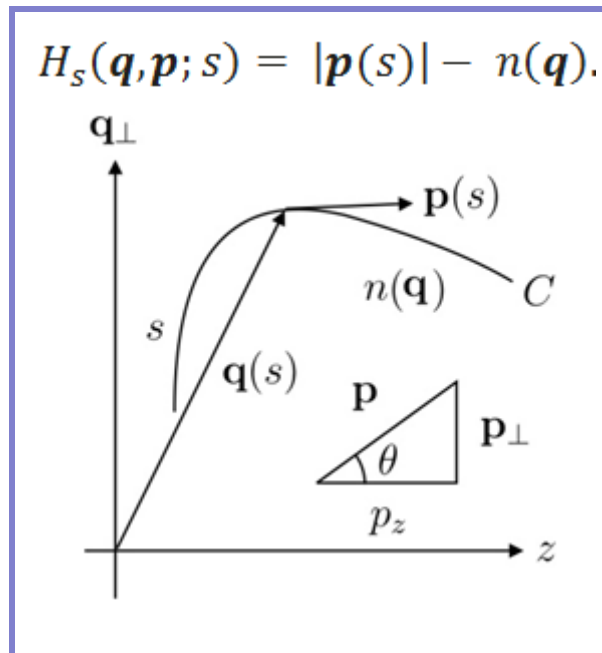


Figura 1. Rayo de luz parametrizado por el vector $\mathbf{q}(s)$. El momento lineal $\mathbf{p}(s)$ porta

información de la dirección del rayo en cada punto $q(s)$

La función Hamiltoniana H_s es entonces una constante de movimiento que toma el valor de cero sobre cualquier trayectoria real del rayo de luz. Ya que estamos interesados en la descripción de los procesos de propagación en el régimen paraxial, será útil construir una formulación Hamiltoniana en la cual el parámetro de evolución sea la distancia medida a lo largo del eje óptico, que en este caso escogeremos como el eje z . Así, las ecuaciones dinámicas toman la forma [Wolf 04]

$$\frac{dq_i}{dz} = \frac{\partial}{\partial p_i} H(\mathbf{q}_\perp, \mathbf{p}_\perp; z), \quad \frac{dp_i}{dz} = - \frac{\partial}{\partial q_i} H(\mathbf{q}_\perp, \mathbf{p}_\perp; z), \quad q_i = x, y, \quad p_i = p_x, p_y$$

con

$$\mathbf{q}_\perp = (x(z), y(z)), \quad \mathbf{p}_\perp = (p_x(z), p_y(z)) \text{ y}$$

$$H(\mathbf{q}_\perp, \mathbf{p}_\perp; z) = - \sqrt{n^2(\mathbf{q}) - p_x^2 - p_y^2} = - p_z$$

Si suponemos que el índice de refracción no depende de la coordenada z entonces $H(\mathbf{q}_\perp, \mathbf{p}_\perp)$ es una constante de movimiento, es decir, que la componente longitudinal del momento lineal del rayo $p_z = n(\mathbf{q}_\perp) \cos \theta$, con θ el ángulo entre el rayo de luz y el eje óptico (ver Figura 1), se conserva. Este hecho se puede considerar como una generalización de la ley de refracción en medios ópticos no homogéneos.

En la aproximación paraxial se considera que el rayo es cercanamente paralelo al eje óptico, lo que significa que la componente transversal de momento lineal del rayo es muy pequeña comparada con la longitudinal. Considerando además la aproximación de guiado débil, que establece que el índice de refracción es una perturbación de un índice de refracción constante n_0 conocido como índice de refracción de referencia, es decir, $n(\mathbf{q}_\perp) = n_0 + \Delta n(\mathbf{q}_\perp)$, $(\Delta n(\mathbf{q}_\perp))^2 \ll 1$, obtenemos

$$H(\mathbf{q}_\perp, \mathbf{p}_\perp) = \frac{|\mathbf{p}_\perp|^2}{2n_0} - n(\mathbf{q}_\perp)$$

Note la semejanza de esta función con la función Hamiltoniana que describe el movimiento bidimensional de una partícula masiva. La masa óptica efectiva del rayo es el índice de refracción de referencia y el potencial óptico es $V = -n(\mathbf{q}_\perp)$, en consistencia con la ecuación de rayos.

III. Análogo electromagnético de la ecuación de Schrödinger

Existen fenómenos de propagación de la luz, tales como la difracción y la interferencia, que no pueden describirse en el régimen de la óptica de rayos. La aproximación clásica más precisa es la teoría electromagnética de Maxwell que considera al campo electromagnético como un conjunto de dos campos vectoriales acoplados, el campo eléctrico y el campo magnético, que se propagan en forma de ondas. Bajo ciertas circunstancias la determinación de estos campos se puede reducir a la solución de una ecuación de onda para una función escalar que es una componente representativa del campo electromagnético, es decir, una función a partir de la cual se pueden determinar todas las componentes de los campos eléctrico y magnético. En este caso, cada componente del campo eléctrico $E(x,z)$ armónica en el tiempo satisface la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(x, z) + k_0^2 n^2 E(x, z) = 0,$$

donde k_0 es el número de onda en el vacío y n es el índice de refracción del medio. En el régimen paraxial, y asumiendo que se satisface la condición de guiado débil $n = n_0 + \Delta n$, esperamos un comportamiento muy cercano al armónico en la coordenada z . De esta forma podemos escribir [Marte 97, Cruz y Cruz 15a]

$$E(x, z) = F(x, z)e^{i k_0 n_0 z},$$

donde $F(x,z)$ es una función cuyas variaciones longitudinales (en la coordenada z) son mucho menores que las variaciones transversales (en la coordenada x). Así, al sustituir esta expresión en la ecuación de Helmholtz, podemos despreciar las derivadas de segundo orden de F con respecto a z . A primer orden en Δn tenemos

$$-\frac{1}{2k_0^2 n_0} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (n_0 - n)F = \frac{i}{k_0} \frac{\partial F}{\partial z}$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación paraxial de Helmholtz y tiene la forma de una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Si además el índice de refracción es independiente de la coordenada z , es decir, $n=n(x)$, podemos escribir

$$F(x, z) = \psi(x)e^{-ik_0 \alpha z},$$

donde $\psi(x)$ obedece la ecuación de valores propios

$$-\frac{1}{2k_0^2 n_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - n(x)\psi = \beta \psi,$$

con $\beta = \alpha - n_0 = -n(x) \cos \theta$, y θ el ángulo que forma el haz de luz con respecto al eje óptico. El parámetro β se conoce como constante de propagación y es claro que está asociado con el ángulo θ . Esta última ecuación tiene la forma de la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E \psi,$$

para una partícula cuántica de masa m y energía E sometida a un potencial $V(x)$, con las siguientes identificaciones $k_0^{(-1)} \rightarrow \hbar, n_0 \rightarrow m, z \rightarrow t, V \rightarrow -n(x), \beta \rightarrow E$. En ocasiones es natural suponer que la potencia P que porta el campo electromagnético está concentrada en una región finita alrededor del eje óptico (por ejemplo en los modos guiados en guías de onda o fibra óptica), en estos casos debe imponerse la condición de cuadrado integrabilidad a la función ψ

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty$$

Esta condición no siempre es aplicable, por ejemplo, en los procesos de reflexión y transmisión de ondas por un medio óptico, el comportamiento asintótico de los campos en la dirección

transversales el de ondas planas, que no son de cuadrado integrable. Por otro lado, las condiciones de frontera del campo electromagnético demandan que tanto la función ψ , como su primera derivada, sean continuas en una frontera entre dos medios ópticos. Ya que estas condiciones son análogas a las condiciones de frontera que debe satisfacer la función de onda de una partícula cuántica, podemos decir que el problema de Helmholtz, en el régimen paraxial, para un medio de índice de refracción uniforme a lo largo del eje óptico es formalmente equivalente a un problema de Schrödinger estacionario.

Como un ejemplo del tipo de sistemas que se pueden describir en este contexto consideremos una guía de ondas óptica, plana, abierta. Este dispositivo consiste de un núcleo de índice de refracción n , que puede ser uniforme o gradual, rodeado de un recubrimiento de sección transversal infinita y de índice de refracción constante $n_0 < n$ [Treysède 14]. Según la identificación $V \rightarrow -n(x)$, esta guía de ondas corresponde a un pozo de potencial de corto alcance en mecánica cuántica [Cruz y Cruz15b]. Los campos modales asociados a la guía se pueden clasificar en modos guiados, de radiación y de fuga [Snyder 83, Treysède 14]. Los modos guiados son campos acotados asociados a constantes de propagación β reales y números de onda transversales puramente imaginarios. Esto significa que los campos decaen exponencialmente en la dirección transversal y oscilan en la dirección del eje óptico. El flujo de energía en la dirección transversal (es decir, hacia el recubrimiento) es nulo y el campo se propaga de forma perfecta a lo largo de la guía. Debido al confinamiento del campo en el interior del núcleo, la constante de propagación correspondiente se discretiza, lo que significa que sólo existirá un número finito de modos guiados. Los modos de radiación, por otro lado, están asociados a constantes de propagación y números de onda transversales puramente reales. Esto significa que los campos correspondientes serán oscilantes en las direcciones transversal y longitudinal. La existencia de estos modos es una consecuencia de la extensión infinita del recubrimiento. En el análogo cuántico de la guía de ondas podemos asociar los modos guiados y los modos de radiación con los estados ligados y los estados de dispersión, respectivamente, de una partícula cuántica sometida al potencial de corto alcance correspondiente [Cruz y Cruz15b]. Además, de la misma forma en que las partículas cuánticas con energías particulares (energías de resonancia) se pueden atrapar temporalmente en la zona de interacción, los campos de radiación con constantes de propagación específicas se pueden capturar de forma transitoria dentro de la guía. Estos campos se conocen como modos de fuga (leaky modes) y son soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz con constante de propagación compleja que crecen exponencialmente en la dirección transversal y se atenúan en la dirección del eje óptico. Este proceso se puede interpretar como una onda en el recubrimiento que es capturada por el núcleo de la guía y se propaga dentro de ella una cierta distancia finita hasta que es emitida de regreso al recubrimiento. Estos modos están asociados a los estados resonantes del potencial de corto alcance [Cruz y Cruz 15b].

IV. Conclusiones

Los sistemas ópticos y mecánicos presentan analogías que están basadas en la equivalencia formal entre las leyes dinámicas que gobiernan el comportamiento de estos sistemas. Entre las ventajas de estas analogías se puede incluir el uso de métodos matemáticos, comúnmente aplicados para abordar problemas de la mecánica Newtoniana o de la mecánica cuántica, para resolver, de manera simple, algunos problemas de la óptica clásica. Al mismo tiempo, debido a la accesibilidad en el manejo de los sistemas ópticos desde el punto de vista práctico en comparación con los sistemas cuánticos, la similitud entre estos sistemas ofrece la posibilidad de diseñar herramientas de laboratorio, basadas en procesos ópticos ondulatorios, para el estudio de un gran número de fenómenos en el ámbito de la mecánica cuántica.

V. Referencias

[Cruz y Cruz 15a] Cruz y Cruz, S., Razo, R., 2015. Wave propagation in the presence of a dielectric slab: the paraxial approximation. *J. Phys. Conf. Ser.* 624, 012018.

[Cruz y Cruz 15b] Cruz y Cruz, S., Rosas-Ortiz, O., 2015. Leaky modes of waveguides as a classical optics analogy of quantum resonances. *Adv. Math. Phys.* 2015, 281472.

[Deutsch 91] Deutsch, I. H., Garrison, J. C., 1991. Paraxial quantum propagation. *Phys. Rev. A* 43, 2498-2513.

[Dragoman 04] Dragoman, D., Dragoman, M., 2004. *Quantum-classical analogies* (Berlin: Springer-Verlag).

[Evans 86] Evans, J., Rosenquist, M., 1986. "F = ma" optics. *Am. J. Phys.* 54, 876-883.

[Gloge 69] Gloge, D., Marcuse, D., 1969. Formal quantum theory of light rays. *J. Opt. Soc. Am.* 59, 1629-1631.

[Lax 75] Lax, M., Louisell, W. H., McKnight, W. B., 1975. From Maxwell to paraxial wave optics. *Phys. Rev. A* 11, 1365-1370.

[Longhi 05] Longhi, S., 2005. Resonant tunneling in frustrated total internal reflection. *Opt. Lett.* 30, 2781.

[Longhi 08] Longhi, S., 2008. Quantum bouncing ball on a lattice: An optical realization. *Phys. Rev. A* 77, 035802.

[Longhi 09] Longhi, S., 2009. Quantum-optical analogies using photonic structures. *Laser Photon Rev.* 3, 243-261.

[Marte 97] Marte, M. A. M., Stenholm, S., 1997. Paraxial light and atom optics: The optical Schrödinger equation and beyond. *Phys. Rev. A* 36, 2940-2953.

[Muga 06] Muga, J. G., Navarro, B., 2006. Optical analog of Rabi oscillation suppression due to atomic motion. *Phys. Rev. A* 73, 022715.

[Saleh 07] Saleh, B. E. A., Teich, M. C., 2007. Fundamentals of photonics (New Jersey: John Wiley & Sons).

[Snyder 83] Snyder, A. W., Love, T. D., 1983. Optical waveguide theory (London: Chapman and Hall)

[Stoler 81] Stoler, D., 1981. Operator methods in physical optics. J. Opt. Soc. Am. 71, 334-341.

[Treyssède14] Treyssède, F., Nguyen, K. L., Bonnet-BenDhia, A. S., Hazard, C., 2014. Finite element computation of trapped and leaky elastic waves in open stratified waveguides. WaveMotion 51, 1093-1107.

[vanEnk 92] van Enk, S. J., Nienhuis, G., 1992. Eigenfunction description of laser beams and orbitalangular momentum of light. Opt. Commun. 94, 147-158.

[Wolf04] Wolf, K. B., 2004. Geometric optics on phase space (Berlin: Srpinge-Verlag).