

---

## FENÓMENO DE RESONANCIA: ANÁLISIS CLÁSICO Y CUÁNTICO

Dr. José Nicolás Fernández García  
jfernandezg@ipn.mx,  
SEPI-UPIITA, Instituto Politécnico Nacional

### **Abstract**

*Se presenta un análisis físico y matemático del oscilador armónico para clarificar el concepto de resonancia desde el punto de vista de la física clásica; así mismo, se realiza una descripción muy breve de este mismo fenómeno, pero desde el punto de vista cuántico, considerando el caso particular de un pozo cuadrado finito. Se demuestra que en ambos casos, las distribuciones de Breit-Wigner pueden ser consideradas como una huella digital del fenómeno de resonancia.*

### **I. Introducción**

A principios del siglo pasado se habían acumulado una serie de experimentos (radiación de cuerpo negro, efecto fotoeléctrico, efecto Compton) que hicieron evidente que las teorías existentes hasta ese momento, eran aplicables solamente a un cierto tipo de sistemas y bajo condiciones muy específicas, es decir, no podían ser utilizadas para explicar procesos que involucran interacciones a escalas atómicas. Lo anterior dio origen al establecimiento de una nueva teoría, la así llamada “Mecánica cuántica”, la cual describe la dinámica de sistemas tan pequeños como los átomos y los electrones y cuyo postulado fundamental es la Ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt},$$

la cual, junto con la condición de normalización  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ , le da un carácter predictivo a la teoría cuántica.

Una de las principales diferencias entre las teorías clásicas y la mecánica cuántica, radica en que las predicciones clásicas tienen un carácter determinista, es decir, una vez que se cuenta con la solución a la ley dinámica, se puede determinar el valor de las variables dinámicas para cualquier instante de tiempo y, por su parte, la mecánica cuántica tiene un carácter probabilístico: únicamente podemos determinar la probabilidad de ocurrencia de un cierto suceso.

Con todo esto en mente, el propósito del presente trabajo será analizar el fenómeno de resonancia desde el punto de vista de la mecánica clásica y, posteriormente, hacer lo propio para el caso cuántico. La estructura del trabajo es la siguiente: en la Sección II se describe brevemente el fenómeno de resonancia para el caso particular del oscilador armónico clásico, la sección III está dedicada al análisis de los espectros discreto y de resonancia de un pozo cuadrado cuántico, tomando en cuenta que el oscilador armónico cuántico, a diferencia del caso clásico, no presenta el fenómeno de resonancia. Finalmente en la Sección IV se dan algunas conclusiones generales del trabajo.

## II. Mecánica clásica y el fenómeno de resonancia

En esta sección analizaremos un caso particular muy sencillo, pero a su vez muy versátil, conocido como oscilador armónico, quizá el ejemplo más común en este sentido es un bloque conectado a un resorte cuyo otro extremo se encuentra fijo a una pared (ver Figura 1).

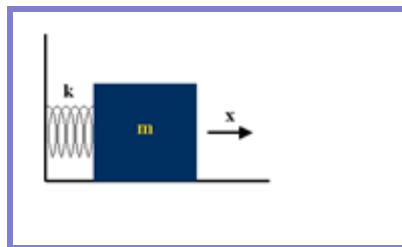


Figura 1. Oscilador armónico: una masa sujeta a un resorte fijo

La ecuación diferencial (segunda ley de Newton) que describe la dinámica del sistema libre de fricción se escribe como

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t), \quad (3)$$

el signo menos significa que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa va en sentido opuesto a su movimiento,  $m$  representa a la masa del bloque y  $k$  representa a la constante del resorte. Una solución particular del sistema se escribe como sigue:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t, \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4)$$

donde  $A$  es una constante a determinar y  $\omega_0$  representa la frecuencia "natural" de oscilación de la masa, es decir, el bloque de masa  $m$  oscila con una frecuencia  $\omega_0$  y con una amplitud de oscilación  $2A$ . Al no existir ningún agente externo que esté interactuando con el bloque, además del resorte, el bloque continuaría oscilando indefinidamente con la misma frecuencia

## FENÓMENO DE RESONANCIA: ANÁLISIS CLÁSICO Y CUÁNTICO

---

y con la misma amplitud de oscilación (aún cuando para el caso clásico esto dista de lo que se observa experimentalmente).

El fenómeno de resonancia, desde el punto de vista de la mecánica clásica, se puede entender como un mecanismo para suministrar energía de manera eficiente en un sistema oscilante [1], por lo que, éste puede ser analizado si suponemos la existencia de un agente externo que introduce una fuerza armónica sobre el sistema, digamos  $F(t)=F_0 \cos\omega t$ . En este caso, la ecuación a resolver es simplemente

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos\omega t . \quad (5)$$

Si suponemos que una solución particular a la ecuación (5), se puede escribir como  $x(t) = B \cos \omega t$ , una simple sustitución nos lleva a la definición de la constante:

$$B = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (6)$$

Recordando que la energía del sistema es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación, podemos notar que existe una relación inversamente proporcional entre la energía del sistema y la diferencia entre la frecuencia natural del oscilador y la frecuencia con la que suministramos la fuerza externa. Por lo tanto, el fenómeno de resonancia en este caso consiste en aprovechar la frecuencia natural del sistema para suministrar energía de manera eficiente, lo cual ocurre para valores de  $\omega$  muy cercanos a  $\omega_0$ ; no obstante, cuando  $\omega=\omega_0$  tenemos una divergencia en el valor de la constante B, lo cual implicaría que la amplitud de oscilación y por lo tanto la energía serían infinitas. Este resultado es consecuencia de una sobre-simplificación en el sistema, es decir, no se están considerando los efectos de fricción.

Para hacer una descripción más realista del sistema se debe introducir un término de fricción, el cual supondremos proporcional a la velocidad con la que se mueve el bloque de masa m, es decir, la ley dinámica en este caso se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} , \quad (7)$$

donde nuevamente  $F(t)$  es la fuerza externa suministrada al sistema. Así, haciendo uso de la representación compleja de las funciones armónicas, proponemos que la fuerza externa varía de la siguiente manera:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

Suponiendo que  $x(t)$  tiene la misma forma funcional que la fuerza externa que estamos aplicando al sistema, es decir,  $x(t)=x_0 e^{i\omega t}$ , podemos mapear la ecuación diferencial (7) a una ecuación de algebraica, de la cual se obtiene inmediatamente la amplitud de oscilación en términos de la amplitud de la fuerza externa:

$$x_0 = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}, \quad (9)$$

donde el término imaginario de la expresión anterior está asociado con la parte disipativa del sistema. Si pensamos que estamos en el regimen de resonancia del sistema, es decir  $\omega \approx \omega_0$ , y recordando que la energía del sistema es proporcional al módulo al cuadrado del término  $x_0$ , obtenemos la forma funcional de la energía total del sistema:

$$E \propto \left(\frac{F_0}{m\omega_0}\right)^2 \rho^2, \quad \text{donde hemos tomado} \quad \rho^2 = \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (10)$$

Claramente, entre mayor sea la intensidad con la que aplicamos la fuerza mayor será la energía que suministramos al sistema. Por otro lado, la introducción del término disipativo nos permite obtener un resultado que está en total acuerdo con nuestra experiencia cotidiana, es decir, cuando  $\omega = \omega_0$ , el sistema se encuentra en resonancia y obtenemos un valor máximo para el valor de la energía, y conforme la frecuencia con la que aplicamos la fuerza se aleja de la frecuencia natural de oscilación se pierde la resonancia del sistema y el mecanismo de suministro de energía se vuelve ineficiente. La conclusión anterior se obtiene fácilmente del análisis de la Figura 2, la cual muestra que el factor  $\rho^2$  describe una distribución de Breit-Wigner, la cual es una distribución característica de la presencia de resonancias [2].

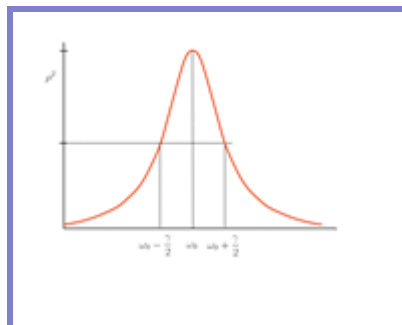


Figura 2. Distribución de Breit-Wigner característica de la

presencia del fenómeno de resonancia

En la siguiente sección analizaremos el pozo cuadrado cuántico, en donde tendremos la oportunidad de analizar los espectros asociados con estados ligados y con el fenómeno de resonancia, pero desde el punto de vista cuántico, el cual, como tendremos oportunidad de demostrar, también tiene como huella digital una distribución de Breit-Wigner.

### III. Mecánica cuántica: estados ligados y resonancias

Como se mencionó en la introducción, la ecuación de Schrödinger es la ley dinámica que describe la evolución de los sistemas cuánticos, la cual en la representación de coordenadas, con unidades apropiadas, para potenciales unidimensionales que no dependen explícitamente del tiempo, se reduce al siguiente problema de eigenvalores:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x), \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1 \quad (11)$$

En este trabajo analizaremos el caso particular del pozo cuadrado finito (ver Figura 3), el cual como podremos ver, admite tanto el espectro discreto como el de resonancia. La expresión matemática para este potencial es la siguiente:

$$V(x) = -V_0 \theta\left(\frac{b}{2} - |x|\right), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (12)$$

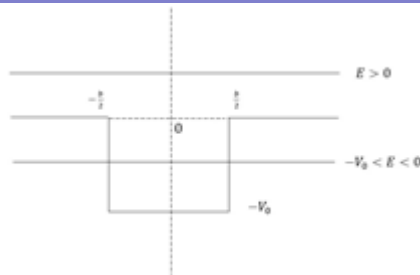


Figura 3. Pozo cuadrado cuántico, con profundidad  $-V_0$ , y ancho  $b$

La solución a la ecuación (13) para el potencial de pozo cuadrado, se obtiene a través de las condiciones de continuidad en los puntos donde el pozo cuadrado es discontinuo, y está dada por [3]:

$$\varphi(x) = A \begin{cases} e^{ikx} + \frac{i(q^2-k^2)}{2\Delta(k,q)} \operatorname{sen}qb e^{-ik(x+b)}, & x < -\frac{b}{2} \\ \frac{k e^{-\frac{ixb}{2}}}{\Delta(k,q)} \left[ i \left( k \cos\left(\frac{qb}{2}\right) - iq \operatorname{sen}\left(\frac{qb}{2}\right) \right) \operatorname{sen}(qx) + \left( q \cos\left(\frac{qb}{2}\right) - ik \operatorname{sen}\left(\frac{qb}{2}\right) \right) \cos(qx) \right] & -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ \frac{kq}{\Delta(k,q)} e^{ik(x-b)} & \frac{b}{2} < x \end{cases} \quad (13)$$

donde A es una constante de normalización,  $k^2=E$ ,  $q^2=k^2+V_0$  y

$$\Delta(k, q) = \left( k \cos\left(\frac{qb}{2}\right) - iq \operatorname{sen}\left(\frac{qb}{2}\right) \right) \left( q \cos\left(\frac{qb}{2}\right) - ik \operatorname{sen}\left(\frac{qb}{2}\right) \right). \quad (14)$$

A partir de las expresiones anteriores se podrán obtener los espectros discreto y de resonancia del sistema.

III.1 Espectro discreto ( $E < 0$ ). En esta sección restringiremos nuestro análisis a energías en el intervalo  $-V_0 < E < 0$ , en tal caso, el término cinético se vuelve un número complejo puramente imaginario, es decir,  $k = ik$ , donde

$\kappa = \sqrt{|E|}$ . Además, del análisis de las expresiones (13) y (14), podemos notar que el término  $\Delta(k,q)$  aparece como factor común en el denominador de la solución en cada una de las regiones. Por lo tanto, los ceros de esta expresión se vuelven divergencias de la solución. Una manera inmediata de evitar estas singularidades es a través de una redefinición de la constante de normalización, digamos  $A = \tilde{A} \Delta(k,q)$ , con lo cual los ceros del factor  $\Delta(k,q)$ , únicamente afectan al término  $e^{kx}$  y, para estos valores específicos, la solución se vuelve de cuadrado integrable, con lo que se satisface la condición de normalización (11). Además los términos multiplicativos de la función  $\Delta(k,q)$  aparecen de forma explícita en la solución correspondiente a la región  $-b/2 \leq x \leq b/2$ . Por lo tanto, las soluciones asociadas con los estados ligados del sistema tienen además una paridad bien definida tal y como puede ser consultado en cualquier libro introductorio de la mecánica cuántica [4]. La siguiente Figura muestra las gráficas de los tres estados ligados de un pozo cuadrado finito de ancho 5 y profundidad 16, las energías correspondientes a estos estados se obtuvieron de resolver numéricamente la ecuación algebraica  $\Delta(k,q) = 0$  ( $E_0 = -15.63, E_1 = -14.69$  y  $E_2 = -13.08$ ):

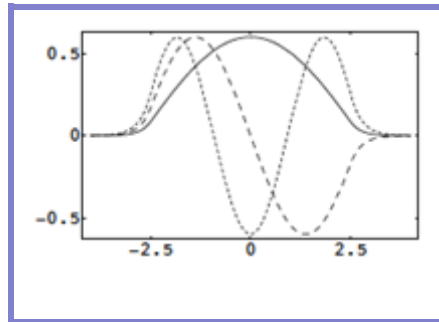


Figura 3. Estado base (línea continua), Primer estado excitado (línea discontinua) y segundo estado excitado (línea punteada), del pozo cuadrado con  $V_0=16$  y  $b=5$ .

III.2 Estados de dispersión y Resonancias ( $\epsilon=E - i \Gamma/2$ ). Además del análisis del espectro discreto del pozo cuadrado cuántico, uno puede analizar el proceso de dispersión, es decir, cuando algún ente cuántico con una cierta energía  $E > 0$  atraviesa la región de interacción. A diferencia de lo que ocurre en el caso clásico, existe una probabilidad diferente de cero de que las partículas sean reflejadas por el pozo de potencial. En este sentido, la información probabilística del proceso de dispersión está contenida en el coeficiente de Transmisión, el cual, para el caso que nos compete está dado por [3]:

$$T = \left| \frac{kq}{\Delta(k,q)} \right|^2 \quad (15)$$

El coeficiente de transmisión proporciona la probabilidad para que una partícula con una cierta energía sea transmitida (ver Figura 4) a través de la región de interacción y, claramente, su complemento nos da la probabilidad de que la partícula sea reflejada, y se conoce como coeficiente de reflexión  $R = 1-T$ .

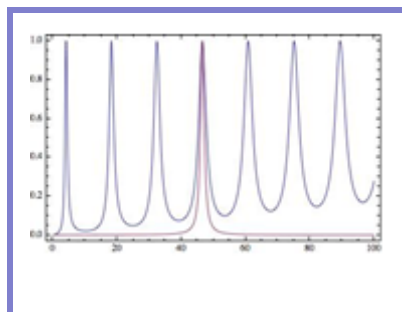


Figura 4. En azul se muestra el coeficiente de transmisión de

un pozo cuadrado de profundidad  $V_0=2000$  y ancho  $b=20$ . En rojo se muestra una distribución de Breit - Winger correspondiente a la cuarta resonancia del sistema.

No obstante, aún cuando podemos predecir con precisión la probabilidad de transmisión o de reflexión, de momento no podemos decir nada acerca del tiempo que gastaría la partícula en la región de interacción. Aquí es donde comienza a hacerse necesario realizar un estudio más profundo, darle mayor libertad a la ecuación (13) incluso admitiendo eigenvalores complejos, los cuales, a su vez estarán íntimamente relacionados con el fenómeno de resonancia. Los eigenvalores complejos se introdujeron en mecánica cuántica por George Gamow, en sus trabajos para describir el proceso de decaimiento de partículas alfa, donde la parte real del eigenvalor complejo está asociada con la energía del sistema y la parte imaginaria es proporcional al tiempo de vida de la resonancia. Poco tiempo después de los trabajos de Gamow, Breit y Wigner demostraron que la ley de decaimiento de un sistema inestable depende únicamente de la función de distribución de energías del estado, dicha distribución tiene la forma de una campana y desde entonces se conoce como distribución de Breit-Wigner; justamente las campanas que aparecen en el coeficiente de transmisión (ver Figura 4) están asociadas cada una con una resonancia. La conclusión anterior se puede corroborar matemáticamente, notando que después de los resultados de Gamow, Breit y Wigner, las resonancias fueron descritas de forma matemática por Siegert como: soluciones de la ecuación de Schrödinger con eigenvalor complejo que satisfacen una condición de onda puramente saliente. En este sentido, un análisis equivalente al realizado para el caso de estados ligados, nos lleva a que los eigenvalores complejos que satisfacen la condición de onda puramente saliente son aquellos que satisfacen la siguiente ecuación algebraica:

$$\Delta(k, q) = 0$$

Por lo tanto, tanto el espectro discreto como el de resonancia se obtienen de la misma condición a la frontera, lo que fortalece la hipótesis de que los estados resonantes pueden ser considerados como estados ligados con un tiempo de vida finito: las partículas con una energía igual a la parte real del eigenvalor complejo de Gamow entran en resonancia con el sistema y se comportan como un sistema estable durante un cierto periodo de tiempo. La ecuación (16) se puede resolver numéricamente y, por ejemplo, en la Figura 4 se muestra la distribución de Breit - Wigner asociada con la cuarta resonancia del sistema ( $\epsilon=46.54-i1.37$ ).

#### IV. Conclusiones

El fenómeno de resonancia desde el punto de vista clásico es un mecanismo idóneo para suministrar energía de manera eficiente a los sistemas oscilantes, lo cual debe ser considerado por los ingenieros que construyen puentes colgantes. Lo anterior para evitar que se repita el desastroso evento ocurrido con el puente elevado de Tacoma Narrows en Estados Unidos [5]. Por su parte el fenómeno de resonancia desde el punto de vista de la mecánica cuántica puede ser considerado como un caso especial de estados de dispersión, los cuales de alguna forma entran en resonancia con el potencial de interacción para producir un único sistema que se mantiene estable por un tiempo de vida que es inversamente proporcional a la parte imaginaria del eigenvalor complejo introducido por Gamow.

#### **IV. Referencias**

- [1] Rosas-Ortiz O., mayo 2008, Resonancias en Mecánica Cuántica, *Conversus* 70, 18-22
- [2] Feynman R.P., 1963, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol 1, Ch. 23, Addison-Wesley (Reading Massachusetts).
- [3] Fernández-García N. and Rosas-Ortiz O., 2008, Gamow-Siegert functions and Darboux-deformed short range potentials, *Annals of Physics* 323, 1397-1414.
- [4] Cohen-Tannoudi C., Diu B and Laloe F., 1977, *Quantum Mechanics Vol. 1*, John Wiley and Sons.
- [5] En la siguiente página web se puede apreciar un video del colapso del Puente de Tacoma Narrows: <https://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag>