

Las Matemáticas Discretas en la Ingeniería

Antonio-Cruz, J. N. Alba-Juárez, C. A. Merlo-Zapata,
C. Márquez-Sánchez, J. A. Rodríguez-Meza, R.
Silva-Ortigoza y H. Taud

Instituto Politécnico Nacional, CIDETEC. Área de
Mecatrónica. Unidad Profesional

RESUMEN

Este trabajo presenta dos aplicaciones de las matemáticas discretas en el área de ingeniería electrónica. Ambas aplicaciones están relacionadas con la lógica proposicional, la primera se refiere a redes de conmutación y la segunda a la obtención de un modelo matemático para el convertidor de potencia doble Boost de corriente directa a corriente directa.

1. Introducción

La importancia de las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico, está determinada por la posibilidad de elaborar modelos matemáticos de los objetos o cuerpos estudiados por las diferentes ramas de la ciencia, es decir describir mediante el lenguaje de las matemáticas las propiedades de los objetos o cuerpos reales. En ingeniería, a partir de los ochenta se ha producido un paulatino desplazamiento de la matemática del continuo hacia la matemática discreta. Esto debido a las siguientes razones: 1) a la aparición de computadoras con una inmensa capacidad de cálculo, enorme rapidez, versatilidad, potencia de representación gráfica, posibilidades para el modelado sin pasar por la formulación matemática de corte clásico y, por otra parte, los algoritmos discretos usados en las ciencias de computación, en la informática, así como en el modelado de diversos fenómenos [1]. 2) Actualmente no basta con desarrollar una teoría para encontrar la solución de un problema, sino que los métodos derivados de la teoría deben ser algoritmizados y estos algoritmos deben ser eficientes para poder ser ejecutados, con la capacidad de cálculo necesaria, en aplicaciones de áreas como la ingeniería electrónica, mecatrónica, bioinformática, de sistemas etc.

Dentro de las matemáticas discretas se encuentra la lógica proposicional, la cual es la base del razonamiento matemático; puesto que posee reglas que especifican el significado de los enunciados matemáticos y que se utilizan para distinguir entre argumentos válidos y no válidos. La lógica proposicional tiene aplicaciones prácticas en el diseño de equipos informáticos, la especificación de sistemas, la inteligencia artificial, la programación computacional, los lenguajes de programación, entre otras áreas de ciencias de la computación [2].

2. Aplicaciones de la lógica proposicional

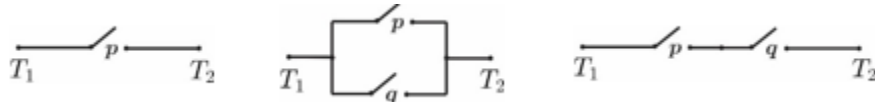
A continuación se describirán dos aplicaciones de la lógica proposicional. La primera de ellas en redes de computación y la segunda en el modelado de un convertidor doble Boost de corriente directa a corriente directa (CD/CD).

2.1. Redes de conmutación

Una red de conmutación está formada por cables e interruptores que conectan dos terminales T1 y T2. Si un interruptor está abierto, entonces la corriente no fluye a través de él, esto será indicado con un 0 en el resto del trabajo; mientras que con un 1 se indicará que el interruptor está cerrado y por

consiguiente la corriente circula a través del interruptor. En la Figura 1 se muestran distintas formas de colocar interruptores.

En la Figura 1(a) existe sólo un interruptor indicado con la letra p, donde la corriente fluye de T1 a T2 si el interruptor está cerrado. Este esquema puede representarse como una proposición p, la cual tendrá un valor de verdad falso (F), si el interruptor está en 0 y un valor de verdad verdadero (V), si el interruptor está en 1. Mientras que en la Figura 1(b) la corriente circula de T1 a T2, si alguno de los interruptores p o q está cerrado. Aquí los interruptores están en paralelo y este esquema se puede representar mediante la disyunción inclusiva $p \vee q$. Finalmente, en la Figura 1(c) se tienen dos interruptores indicados con las letras p y q, respectivamente; en esta red es necesario que los dos interruptores estén cerrados para que la corriente circule de T1 y T2, aquí los dos interruptores están en serie y esta red se puede representar con la conjunción $p \wedge q$ [3].



(a) Interruptor p (b) Interruptor p y q en paralelo (c) Interruptores p y q en serie

La Figura 2 muestra una red de conmutación expresada como $(p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee q)$ en el contexto de lógica proposicional; el objetivo es simplificarla, es decir, obtener una red equivalente a la ya mencionada, pero con menor cantidad de interruptores.

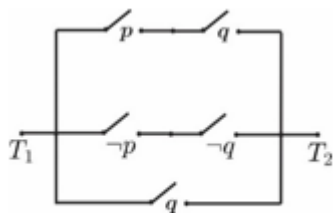


Figura 2. Red de conmutación.

Figura 2. Red de conmutación

Aplicando las equivalencias lógicas (ver [2]) se obtiene lo mostrado en la Tabla 1. Por lo tanto, la red simplificada de la Figura 2 se expresa como $q \vee \neg p$ y aparece en la Figura 3

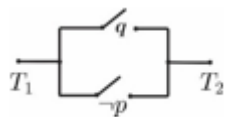


Figura 3. Red de conmutación equivalente a la mostrada en la Figura 2.

Tabla 1. Simplificación de la red de conmutación mostrada en la Figura 2.

$(p \wedge q) \vee [(\neg p \wedge \neg q) \vee q]$	JUSTIFICACIÓN
$(p \wedge q) \vee [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)]$	Al aplicar ley distributiva de \vee respecto de \wedge
$(p \wedge q) \vee [(\neg p \vee q) \wedge V]$	Al aplicar inversa de \vee
$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$	Al aplicar ley de identidad de \wedge
$[(p \wedge q) \vee q] \vee \neg p$	Al aplicar leyes conmutativa y asociativa de \vee
$q \vee \neg p$	Al aplicar ley de absorción

2.2. Modelado de un convertidor doble Boost de CD/CD

Con el objeto de abordar una aplicación de la matemática discreta aún más representativa en la ingeniería, es esta sección se presentan algunos de los conceptos de la matemática discreta asociados con un convertidor de potencia de CD/CD del tipo doble Boost. Es importante mencionar que el modelado de este convertidor se llevará a cabo de manera general, ya que el objetivo de este trabajo es únicamente mostrar una aplicación de la matemática discreta en la ingeniería y el estudio de dicho convertidor requiere de conocimientos avanzados acerca de electrónica de potencia.

El convertidor de potencia doble Boost de CD/CD es un dispositivo electrónico conformado por dos convertidos de potencia Boost conectados en cascada (ver [4]). El propósito principal del convertidor doble Boost consiste en proporcionar un voltaje de salida mayor a un voltaje aplicado en su alimentación. El diagrama electrónico ideal del convertidor antes mencionado puede verse la Figura 4.

□@|@

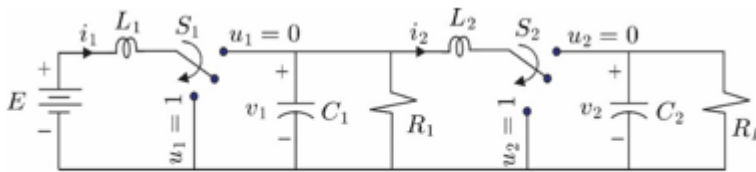


Figura 4. Circuito ideal del convertidor de potencia Boost-Boost de CD/CD.

En la Figura 4, los interruptores S_1 y S_2 pueden estar abierto o cerrados, es decir, desde un contexto de conjuntos en matemática discreta, los valores que pueden tomar los interruptores existen en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. Los parámetros i_1, v_1, i_2 y v_2 corresponden a las corrientes y voltajes asociados a L_1, C_1, L_2 , y C_2 , respectivamente, siendo v_1 el voltaje de salida de la primera etapa del convertidor doble Boost (primer convertidor Boost) y v_2 el voltaje de salida de la segunda etapa del convertidor doble Boost (segundo convertidor Boost) y al mismo tiempo el voltaje de salida del convertidor doble Boost. Finalmente, las cargas son representadas por R_1 y R_L , mientras que E denota la fuente de alimentación.

Para la obtención del modelado matemático del convertidor doble Boost de CD/CD principalmente se consideran los estados de los interruptores S_1 y S_2 , de modo que los modos de operación de dicho convertidor dependen del estado en que se encuentren ambos interruptores; por lo tanto, se puede decir que el convertidor doble Boost es un dispositivo binario. Además, como se mencionó en la Subsección 2.1., los interruptores pueden ser representados por proposiciones. Así, la salida de voltaje del convertidor (v_2) se puede describir mediante la operación de proposiciones conocida como disyunción inclusiva, siendo los interruptores S_1 y S_2 las proposiciones p y q , respectivamente. Esto debido a que en el caso en el que tanto p como q son falsas el valor de verdad de $p \vee q$ es falso, es decir cuando $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, $v_2 = E$. En los casos restantes $p \vee q$ es verdadera, en otras palabras $v_2 > E$, puesto que cuando p es falsa y q verdadera ($S_1 = 0$ y $S_2 = 1$), en la primera etapa del convertidor doble Boost el voltaje no es amplificado ($v_1 = E$); sin embargo, en la segunda etapa v_1 si es amplificado, siendo $v_2 > E$. En el caso en que p es verdadera y q falsa ($S_1 = 1$ y $S_2 = 0$), en la primera etapa del convertidor el voltaje es amplificado ($v_1 > E$), pero en la segunda etapa v_1 no es amplificado ($v_1 = v_2$);

sin embargo, al ser $v_2 = v_1$ y $v_1 > E$, en consecuencia el convertidor cumple su propósito. Finalmente, en la situación en la cual p y q son verdaderas ($S_1 = 1$ y $S_2 = 1$) al ser amplificado v_1 y v_2 en la primera y segunda etapa, respectivamente, es claro que de igual manera el convertidor doble Boost cumple su objetivo. A manera de resumen, la analogía entre los valores de verdad de p q y el voltaje de salida del convertidor se muestran en la Tabla 2.

Los circuitos electrónicos derivados de los valores de verdad de p y q , los cuales representan los modos de operación del convertidor, se muestran en la Figura 5. En base a estos diagramas electrónicos y aplicando las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff se obtienen las ecuaciones que describen las corrientes y voltajes (i_1, v_1, i_2 y v_2) del convertidor doble Boost en cada uno de sus modos de operación. Siendo dichas ecuaciones las siguientes [4]:

- Para el circuito mostrado en la Figura 5(a), donde $p(F)$ y $q(F)$, es decir $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}L_1 \frac{di_1}{dt} &= -v_1 + E, \\L_2 \frac{di_2}{dt} &= v_1 - v_2, \\C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_1 - \frac{v_1}{R_1} - i_2, \\C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_2 - \frac{v_2}{R_L}.\end{aligned}$$

- Respecto al circuito que aparece en la Figura 5(b), en el cual $p(F)$ y $q(V)$, esto es $S_1 = 0$ y $S_2 = 1$, se encuentra

□@!@

$$\begin{aligned}L_1 \frac{di_1}{dt} &= -v_1 + E, \\L_2 \frac{di_2}{dt} &= v_1, \\C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_1 - \frac{v_1}{R_1} - i_2, \\C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{v_2}{R_L}.\end{aligned}$$

- Del circuito mostrado en la Figura 5(c), donde $p(V)$ y $q(F)$, es decir $S_1 = 1$ y $S_2 = 0$, se genera

$$\begin{aligned}L_1 \frac{di_1}{dt} &= E, \\L_2 \frac{di_2}{dt} &= v_1 - v_2, \\C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} - i_2, \\C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_2 - \frac{v_2}{R_L}.\end{aligned}$$

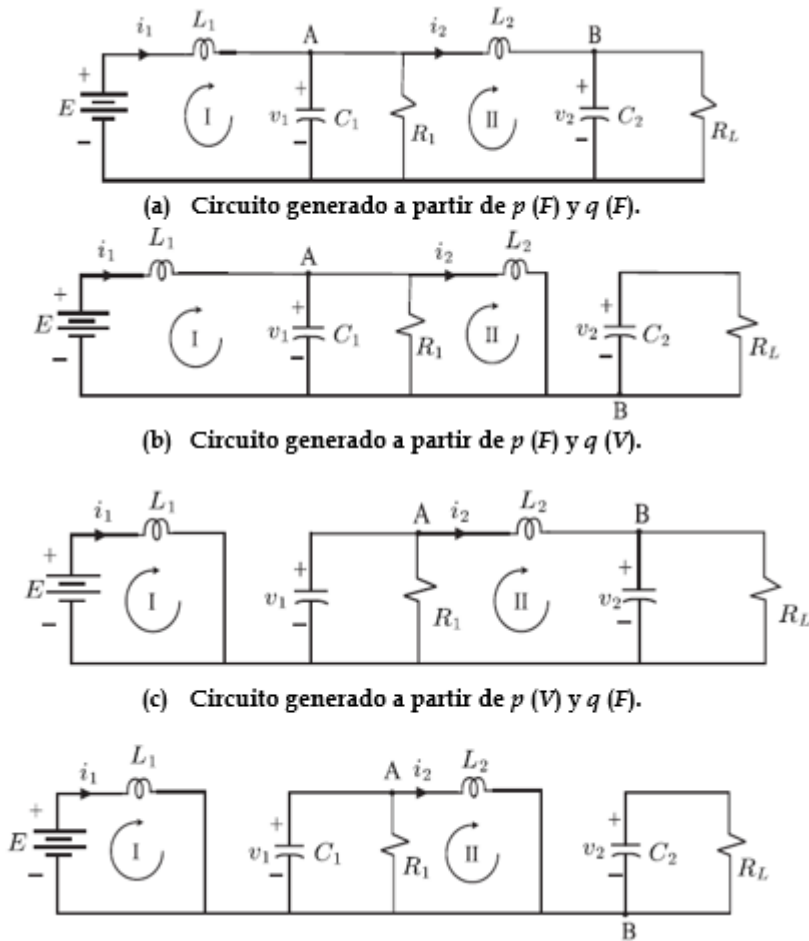
- Para el circuito que aparece en la Figura 5(d), en el cual $p(V)$ y $q(V)$ ($S_1 = 1$ y $S_2 = 1$), se obtiene

$$\begin{aligned}L_1 \frac{di_1}{dt} &= E, \\L_2 \frac{di_1}{dt} &= v_1, \\C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{v_1}{R_1} - i_2, \\C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{v_2}{R_L}.\end{aligned}$$

Finalmente, al integrar las ecuaciones en un solo sistema de ecuaciones y considerando los valores del conjunto discreto $\{0, 1\}$ de los interruptores S_1 y S_2 , se llega al siguiente modelo matemático del convertidor de potencia doble Boost de CD/CD (ver [4]).

$$\begin{aligned}L_1 \frac{di_1}{dt} &= -(1 - S_1)v_1 + E, \\C_1 \frac{dv_1}{dt} &= (1 - S_1)i_1 - \frac{v_1}{R_1} - i_2 \\L_2 \frac{di_1}{dt} &= v_1 - (1 - S_2)v_2, \\C_2 \frac{dv_2}{dt} &= (1 - S_2)i_2 - \frac{v_2}{R_L}.\end{aligned}$$

□



(d) Circuito generado a partir de $p(V)$ y $q(V)$. Figura 5: Modos de operación del convertidor Boost-Boost de CD/CD.

3. Conclusiones

En este trabajo se han presentado dos aplicaciones de las matemáticas discretas en la ingeniería electrónica. La primera de ellas está relacionada con el desarrollo de redes de conmutación y con la simplificación de las mismas utilizando lógica proposicional. En lo referente a la segunda aplicación, se presentó una analogía entre los modos de operación del convertidor Boost-Boost de CD/CD y la operación de proposiciones denominada disyunción inclusiva, a partir de la cual y aplicando las leyes de corriente y voltaje de Kirchoff se obtuvo un modelo matemático del convertidor doble Boost.

4. Referencias

- [1] M. de Guzmán Ozámiz, "Tendencias innovadoras en educación matemática". Disponible en: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras>. Consultado en: Diciembre, 2013.
- [2] K. H. Rosen, Matemática Discreta y sus Aplicaciones, 5a. ed., Ed. McGraw-Hill/Interamericana de España, S. A. U., Aravaca, Madrid, 2004.
- [3] M. Alberto, I. Schwer, Y. Fumero, P. Llop y M. Chara, Matemática Discreta, Ed. Universidad Tecnológica Nacional-edUTecNe, Buenos Aires, República Argentina, 2010.

[4] V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza y R. V. Carrillo-Serrano, Control Automático: Teoría de Diseño, Construcción de Prototipos, Modelado, Identificación y Pruebas Experimentales, Colección CIDETEC-IPN, México, DF, México, 2013.