

IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS PARA SISTEMAS DISCRETOS

Alfredo Roldan Caballero

Ramón Silva Ortigoza

Hind Taud

Jesús Ramírez Morales

Cristofer Mateo Rodríguez López

Salvador Tavera Mosqueda

Instituto Politécnico Nacional

CIDETEC Área de Mecatrónica y energías renovables

Unidad Profesional Adolfo López Mateos

Resumen

En los diversos procesos industriales existentes, es usual que estén gobernados por alguna técnica de control automático. Para aplicar una técnica de control automático de manera efectiva y asegurar el correcto funcionamiento del sistema se deben conocer los parámetros, desde el modelo matemático que lo gobierna hasta las características de sus componentes. Sin embargo, en ocasiones se puede presentar la problemática de contar con el sistema de manera física pero no conocer sus parámetros. En este escrito se presenta un algoritmo que permite obtener aproximaciones de los parámetros de sistemas discretos.

1. INTRODUCCIÓN

Para un uso óptimo de sistemas que incorporan la implementación de control automático, resulta elemental conocer el modelo matemático del mismo, así como contar con el sistema físico. Sin embargo, en ocasiones se puede presentar la situación de requerir trabajar sobre un sistema del cual no se conoce nada más que su existencia física y para poder manipularlo se requiere el conocimiento de los parámetros. El método que aquí se presenta muestra como a partir de proponer un estado y una entrada u al sistema, se logra obtener aproximaciones de los parámetros. Con la finalidad de demostrar la efectividad de la técnica presentada, se proponen modelos y valores, a los cuales se pretende llegar una vez ejecutado el algoritmo. El resto del trabajo se presenta de la siguiente manera, en la sección 2 se llevan a cabo dos vertientes en las cuales, una de ellas muestra un ejemplo con resultados para un sistema lineal y el otro caso se tiene el modelo matemático de un péndulo el cual es un sistema no lineal, posteriormente en la sección 3 se encuentran las conclusiones y finalmente en la sección 4 se muestran las referencias.

2. DESARROLLO

2.1. Caso lineal

Considerando un sistema lineal descrito por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, x_0 = 0$$

$$y_k = x_k$$

con las constantes

$$A = \begin{pmatrix} -5,0876 & 9,8129 \times 10^{-5} \\ 134,0003 & -0,1005 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,0144 \\ 4,1862 \end{pmatrix}$$

Al realizar $k = 0, 1, \dots, q + 1$ con $q = 5$, se obtienen los siguientes valores de salida y .

k	x_k	u_k
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	10
1	$\begin{pmatrix} 0,1440 \\ 41,8620 \end{pmatrix}$	10
2	$\begin{pmatrix} -0,5845 \\ 56,9509 \end{pmatrix}$	10
3	$\begin{pmatrix} 3,1233 \\ -42,1856 \end{pmatrix}$	10
4	$\begin{pmatrix} -15,7504 \\ 464,6280 \end{pmatrix}$	10
5	$\begin{pmatrix} 80,3211 \\ -2,1154 \times 10^3 \end{pmatrix}$	10
6	$\begin{pmatrix} -408,7054 \\ 1,1018 \times 10^4 \end{pmatrix}$	10

Tabla 1. Valores calculados de $x[k]$

Verificar el valor de las constantes A y B mediante una estimación por medio del método de mínimos cuadrados.

- Solución

El método de mínimos cuadrados nos dice que

$$(A^T \ B^T) = \lambda^T = \left(\sum_{k=0}^q x_{k+1} \varphi^T \right) \left(\sum_{k=0}^q \varphi \varphi^T \right)^{-1} \quad (1)$$

donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores de la Tabla 1 en (1) para valores de $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, mediante el programa en Matlab mostrado en la Figura 1 se obtienen los resultados de manera gráfica y numérica como se observa en la Figura 2 y la Tabla 2 respectivamente, es notable como el método de mínimos cuadrados converge rápidamente a los valores de A y B .

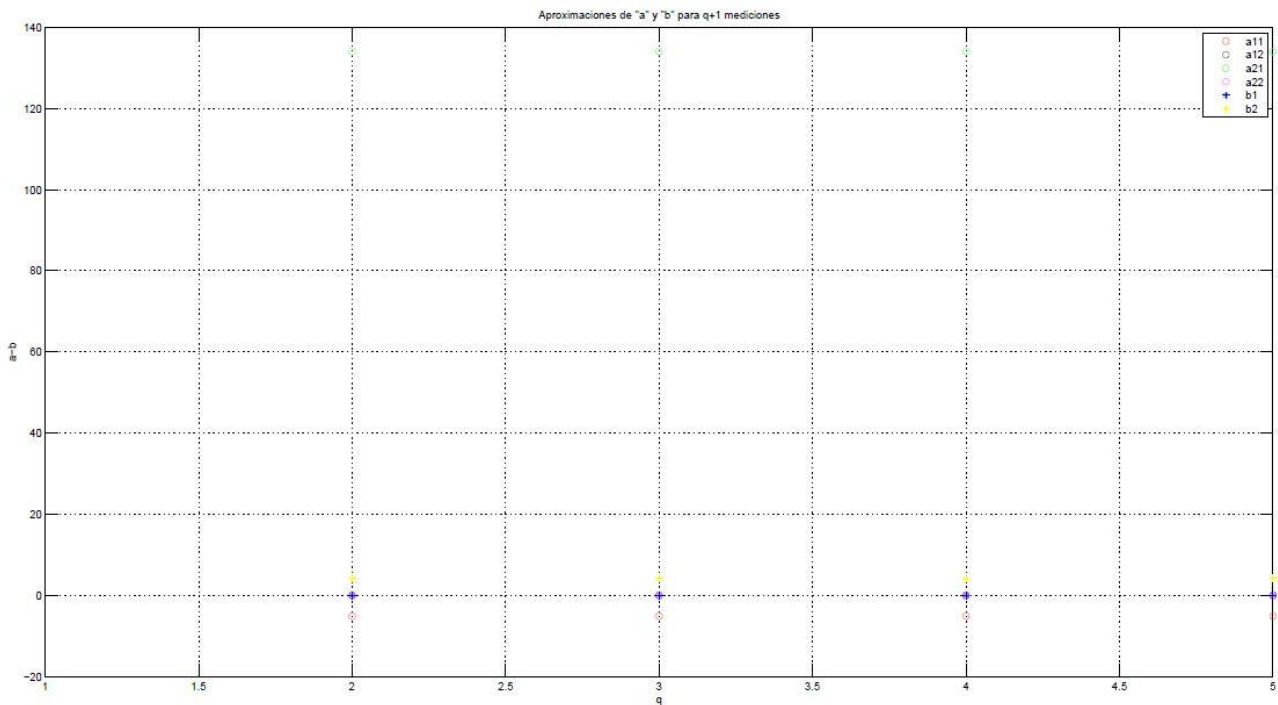
```

1 - clear all; clc; hold off;
2 - x=[0; 0]; u=10; A=[-5.0876, 9.8129*(10^-5); 134.0003, -0.1005]; B=[0.0144; 4.1862]; mediciones=6; ite=mediciones+1;
3 - Matriz=zeros(3); sum=zeros(2,3);
4
5 - for i=1:ite-1
6 -     x(:,i+1)=A*x(:,i)+B*u;
7 - end
8
9 - for i=1:ite
10 -    psi(:,i)=[x(:,i);u];
11 - end
12
13 - for i=1:ite-1
14 -     Matriz=Matriz+(psi(:,i)*(psi(:,i)'));
15 -     sum=sum+(x(:,i+1)*psi(:,i)');
16 -     q=i-1;
17 -     ab=sum*inv(Matriz);
18 -     disp('Medición'); disp(i);
19 -     a(:,2*i-1:2*i)=ab(:,1:2);
20 -     disp(a(:,2*i-1:2*i));
21 -     b(:,i)=ab(:,3);
22 -     disp(b(:,i));
23 -     if det(Matriz)~=0
24 -         figure(1);
25 -         %axis([0,q,0,1.2])
26 -         plot(q,a(1,2*i-1),'+b',q,a(1,2*i),'ko',q,a(2,2*i-1),'go',q,a(2,2*i),'mo',q,b(1,i),'b*',q,b(2,i),'y*');
27 -         grid on
28 -         hold on
29 -         legend('a11','a12','a21','a22','b1','b2');
30 -         xlabel('q')
31 -         title('Aproximaciones de "a" y "b" para q+1 mediciones');
32 -         ylabel('a-b')
33 -     else
34 -         srt=['cuando q = ',num2str(q),' no existe solucion'];
35 -         disp(srt)
36 -     end
37
38 - end

```

Figura 1. Programa para obtener aproximaciones de A y B.

Figura 2. Aproximaciones de A y B.



2.2. Caso no lineal

Considerando un sistema no lineal descrito por

$$x_{k+1} = \lambda^T \varphi$$

en donde

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 7,5 \times 10^{-8} & 0,327 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \sin x_{1k} \\ u_k \end{pmatrix}$$

q	A	B
0	<i>indefinido</i>	<i>indefinido</i>
1	<i>indefinido</i>	<i>indefinido</i>
2	$\begin{pmatrix} -5,0876 & 9,8129 \times 10^{-5} \\ 134,0003 & -0,1005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0144 \\ 4,1862 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -5,0876 & 9,8129 \times 10^{-5} \\ 134,0003 & -0,1005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0144 \\ 4,1862 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -5,0876 & 9,8129 \times 10^{-5} \\ 134,0003 & -0,1005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0144 \\ 4,1862 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -5,0876 & 9,8129 \times 10^{-5} \\ 134,0003 & -0,1005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0144 \\ 4,1862 \end{pmatrix}$

Tabla 2. Valores obtenidos de A y B .

- Solución

Tomando en cuenta el método de mínimos cuadrados, el cual dicta que

$$\lambda^T = \left(\sum_{k=0}^q x_{k+1} \varphi^T \right) \left(\sum_{k=0}^q \varphi \varphi^T \right)^{-1} \quad (2)$$

Realizando las iteraciones en (2) para valores de $q = 0,1,2,3,4,5,\dots,17$ se obtienen las aproximaciones de los parámetros λ con un error menor a 0.001, los resultados encontrados mediante el programa en Matlab mostrado en la Figura 3 se muestran de manera numérica en la Tabla 3 y de manera gráfica en la Figura 4, como se puede observar, el método de mínimos cuadrados converge a valores de λ de manera rápida, aunque requiere mayor cantidad de iteraciones comparado con el caso lineal. Debe considerarse que para que el método de mínimos cuadrados se pueda utilizar para calcular los parámetros del modelo dinámico de un sistema mediante aproximaciones, la entrada de control debe cumplir con

$$\det \sum_{k=0}^q \varphi \varphi^T \neq 0$$

de esta manera se asegura la existencia de la aproximación para $q + 1$ mediciones.

```

1 - clear all; clc; hold off;
2 - x=[0; 0]; u=10; lambda=[1,10^-2,0,0;0,0.999999925, 0.327, 5.55*10^-4]; mediciones=300; ite=mediciones+1;
3 - Matriz=zeros(4); sum=zeros(2,4);
4
5 - for i=1:ite-1
6 -     psi(:,i)=[x(1,i);x(2,i);sin(x(1,i));u];
7 -     x(:,i+1)=lambda*psi(:,i);
8 -     Matriz=Matriz+(psi(:,i)*(psi(:,i)'));
9 -     sum=sum+(x(:,i+1)*psi(:,i)');
10 -    q=i-1;
11 -    disp('Medición');disp(i);
12 -    ab=sum*inv(Matriz);
13 -    lam(:,4*i-3:4*i)=ab;
14 -    if det(Matriz)~=0
15 -        figure(1);
16 -        %axis([0,q,0,1.2])
17 -        plot(q,ab(1,1),'ro',q,ab(1,2),'ko',q,ab(1,3),'go',q,ab(1,4),'mo',q,ab(2,1),'x*',q,ab(2,2),'k*',q,ab(2,2),'g*',q,ab(2,2),'m*');
18 -        grid on
19 -        hold on
20 -        legend('lambda11','lambda12','lambda13','lambda14','lambda21','lambda22','lambda23','lambda24');
21 -        xlabel('q')
22 -        title('Aproximaciones de "lambda" para q+1 mediciones');
23 -        ylabel('a-b')
24 -        if norm(abs(ab-lambda))<0.001
25 -            srt=['cuando q = ',num2str(q),' se identifico con error menor a 0.001'];
26 -            disp(srt)
27 -            break
28 -        end
29 -    else
30 -        srt=['cuando q = ',num2str(q),' no existe solucion'];
31 -        disp(srt)
32 -    end
33 - end
34
35

```

Figura 3. Programa para obtener aproximaciones de λ .

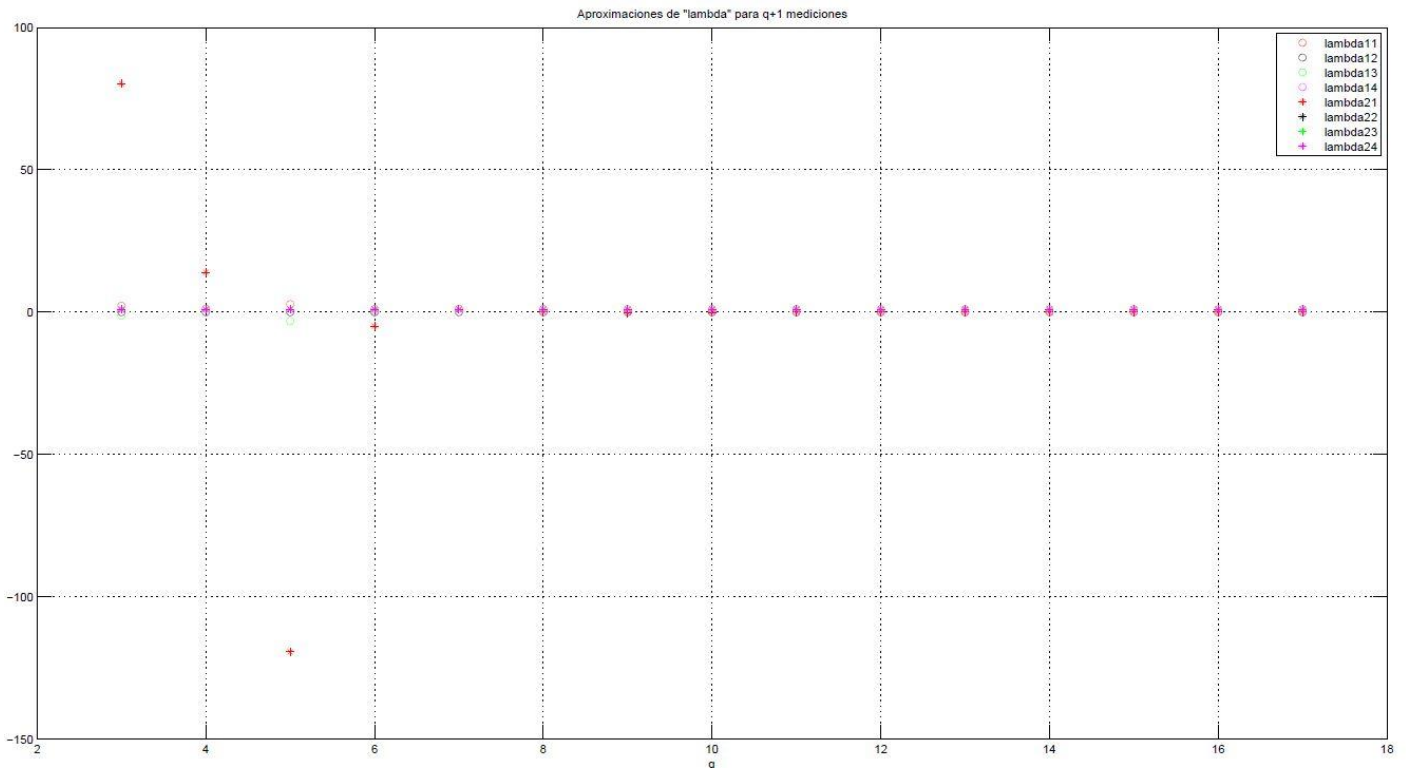


Figura 4. Aproximaciones de λ .

q	λ^T
0	<i>indefinido</i>
1	<i>indefinido</i>
2	$\begin{pmatrix} 12,6959 & 0,0100 & 7,3041 & 3,38 \times 10^{-21} \\ -495,881 & 1 & 72,2085 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
.	.
.	.
.	.
8	$\begin{pmatrix} 1,0438 & 0,0100 & -0,0384 & -3,116 \times 10^{-13} \\ -0,8719 & 1 & 0,0982 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1,0089 & 0,0100 & -0,0125 & -4,3807 \times 10^{-14} \\ -0,1181 & 1 & 0,55 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
.	.
.	.
.	.
15	$\begin{pmatrix} 0,999 & 0,0100 & 1,627 \times 10^{-4} & 1,455 \times 10^{-13} \\ 0,0028 & 1 & 0,3272 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 0,999 & 0,0100 & 1,953 \times 10^{-4} & 6,374 \times 10^{-14} \\ -0,0014 & 1 & 0,3293 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 0,0100 & 2,9011 \times 10^{-5} & 4,442 \times 10^{-14} \\ 5,968 \times 10^{-4} & 1 & 0,3264 & 5,55 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$

Tabla 3. Valores de aproximaciones obtenidos de λ .

3. CONCLUSIONES

Se puede observar que cuando el algoritmo es aplicado a un sistema lineal, se requiere menor cantidad de iteraciones para llegar a las aproximaciones más cercanas a los parámetros del sistema en comparación de un sistema no lineal en donde el cómputo requerido para obtener las aproximaciones requiere mayor tiempo de ejecución. Comparando los resultados esperados con los resultados obtenidos, se nota que algunos son exactamente iguales y el resto son demasiado cercanos por lo que el algoritmo cumple con su objetivo.

4. REFERENCIAS

- [1] Jose R. Espinoza C. Apuntes de Sistema de Control - 547 504. Universidad de Concepción, 9na edición, enero 2009.
- [2] Rodríguez, S. A., et al., (2009). Simulación de la Respuesta de una Cuenca a un Hidrograma. XI Congreso Nacional de Ingeniería, Electromecánica y de Sistemas, del 9 al 13 de noviembre del 2009, México, D.F.
- [3] Moisés R. Velázquez (2014) Determinación de las regiones de estabilidad y desempeño de un motor de combustión interna (Tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.