

MODELADO Y VALIDACIÓN DE LA CINEMÁTICA DIRECTA DEL ROBOT ABB IRB120-3/0.6 MEDIANTE MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA Y CUATERNIONES DUALES

M. en I. Gerardo Hernandez Valencia Dr. Celso Márquez Sánchez Dr. Jacobo Sandoval Gutiérrez
ORCID:0009-0001-2664-7932

UAM LERMA

2261800893@correo.ler.uam.mx

c.marquez@correo.ler.uam.mx

j.sandoval@correo.ler.uam.mx

RESUMEN

En este trabajo se modeló la cinemática directa del robot ABB IRB120-3/0.6 mediante matrices de transformación homogénea (MTH) y cuaterniones duales (CD), utilizando los mismos parámetros de Denavit-Hartenberg. Al comparar ambos modelos con RoboDK se identificó una discrepancia en la coordenada p_z , causada por un error de signo en la conversión de CD a MTH. Para una configuración de prueba no simétrica, la formulación reportada produjo un error de 15.683221 mm en p_z , mientras que la expresión corregida coincidió con los resultados obtenidos mediante MTH y RoboDK. Finalmente, la orientación se validó al comparar las matrices de rotación y los cuaterniones unitarios correspondientes.

Palabras clave: ABB IRB 120; cinemática directa; cuaterniones duales; matrices de transformación homogénea; RoboDK.

ABSTRACT

This work presents the forward kinematic modeling of the ABB IRB120-3/0.6 robot using homogeneous transformation matrices (HTM) and dual quaternions (DQ), both derived from the same Denavit-Hartenberg parameters. A comparison between both models and RoboDK revealed a discrepancy in the (p_z) coordinate caused by a sign error in the DQ-to-HTM conversion. For a non-symmetric test configuration, the reported formulation produced a (p_z) error of 15.683221 mm, whereas the corrected expression matched the results obtained with HTM and RoboDK. Finally, the orientation was validated by comparing the corresponding rotation matrices and unit quaternions.

Keywords: ABB IRB120; forward kinematics; dual quaternions; homogeneous transformation matrices; RoboDK.

Introducción

El modelado cinemático es una etapa fundamental para la planeación de trayectorias, simulación y control de robots manipuladores [1]. La convención de Denavit-Hartenberg (DH) y las matrices de transformación homogénea (MTH), representan el método más utilizado para describir la posición y orientación de un robot, así como las transformaciones espaciales entre marcos de referencia [2]. Como alternativa, los cuaterniones duales (CD) permiten representar rotación y traslación mediante una entidad algebraica de ocho componentes. En [3] se reportó que el producto de CD requiere aproximadamente 15% menos operaciones y 25% menos multiplicaciones que el producto de MTH, además de ofrecer una representación más compacta del movimiento rígido [4].

Diversos autores han empleado CD para resolver problemas de cinemática directa. En [5] se desarrolló una formulación que relaciona los parámetros de DH con el cuaternión dual elemental y propuso una ecuación para convertir de CD a MTH, validándola en manipuladores robóticos de 6 grados de libertad (GDL). Por otra parte, en [6] implementaron un algoritmo DQ-DH en ROS para un robot serial genérico de 6 GDL. En la literatura consultada no se encontró una validación que comparara, sobre los mismos parámetros de DH, los resultados con MTH y CD utilizando un simulador industrial de referencia como RoboDK.

El objetivo de este trabajo fue verificar que ambas representaciones describen la misma posición y orientación del robot ABB IRB120-3/0.6 a partir de los mismos parámetros DH, y documentar una inconsistencia detectada durante la conversión de CD a MTH.

Parámetros del robot

La Figura 1 muestra la asignación de sistemas de coordenadas para el robot según la convención DH. Las longitudes del robot son $l_1 = 290$ mm, $l_2 = 270$ mm, $l_3 = 70$ mm, $l_4 = 302$ mm y $l_5 = 72$ mm [7]. La segunda articulación tiene un desfase mecánico de 90° , por lo que su ángulo efectivo en el modelo es $q_2 + 90^\circ$.

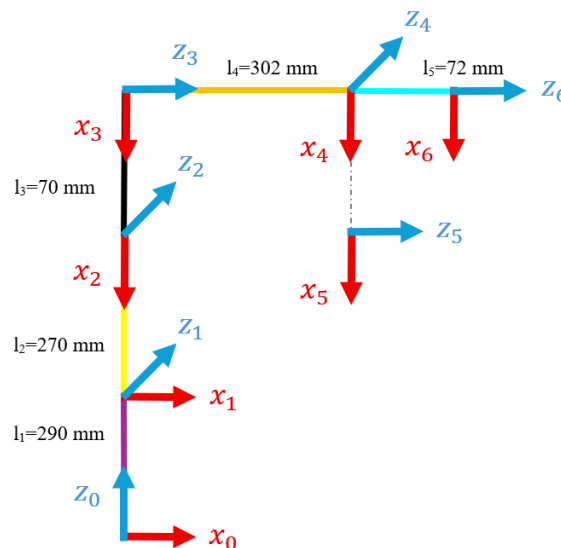


Figura 1. Asignación de sistemas de coordenadas DH para el robot ABB IRB120-3/0.6. Fuente: elaboración propia.

Tabla 1. Parámetros DH del robot ABB IRB120-3/0.6. Fuente: elaboración propia.

Junta	θ_i	α_i	a_i (mm)	d_i (mm)
1	q_1	-90°	0	290
2	$q_2 + 90^\circ$	0°	-270	0
3	q_3	90°	-70	0
4	q_4	-90°	0	302
5	q_5	90°	0	0
6	q_6	0°	0	72

Estos parámetros constituyeron la base común de ambos modelos, de modo que cualquier diferencia en los resultados se atribuye a la representación matemática, no a la geometría del robot.

Modelo con matrices de transformación homogénea

La posición y orientación del efector final respecto a la base se obtienen multiplicando las seis matrices elementales, cada una construida a partir de los cuatro parámetros DH de la articulación correspondiente [8]:

$${}^0T_6 = \prod_{i=1}^6 {}^{i-1}A_i = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 \quad (1)$$

La submatriz 3x3 superior izquierda de 0T_6 es la matriz de rotación $R \in SO(3)$; la cuarta columna contiene el vector de posición $p = [p_x \ p_y \ p_z]^T$. La expresión simbólica se obtuvo con MATLAB Symbolic Math Toolbox aplicando el comando simplify a cada producto parcial.

Modelo con cuaterniones duales

Un cuaternión dual unitario se define como: $DQ = q_r + \varepsilon q_d$, con $\varepsilon^2 = 0$, $q_r = [q_w, q_x, q_y, q_z]$, $q_d = [q_{w\varepsilon}, q_{x\varepsilon}, q_{y\varepsilon}, q_{z\varepsilon}]$, donde q_r es la parte real, asociada a la rotación, y q_d es la parte dual, asociada a la traslación [9]. Cada articulación genera un cuaternión dual elemental a partir de sus parámetros DH, siguiendo la formulación de [3]. La posición y orientación del efector final se calculan mediante el producto de Hamilton encadenado:

$${}^0DQ_6 = \prod_{i=1}^6 {}^{i-1}DQ_i = {}^0DQ_1 \otimes {}^1DQ_2 \otimes {}^2DQ_3 \otimes {}^3DQ_4 \otimes {}^4DQ_5 \otimes {}^5DQ_6 \quad (2)$$

Para que 0DQ_6 represente una transformación rígida válida deben cumplirse dos condiciones: $\|q_r\| = 1$ (unitariedad) y $q_r \cdot q_d = 0$ (ortogonalidad entre las partes real y dual).

Conversión de cuaternión dual a matriz homogénea y corrección identificada

Para comparar directamente ambos modelos, el cuaternión dual se convirtió a MTH. Al aplicar la fórmula completa de conversión de [5], las componentes p_x , p_y y la submatriz de rotación coincidieron con el modelo MTH, pero p_z difería. Para identificar donde se encontraba el error se usó otro método para extraer el vector de posición presentado por [11]:

$$[0, p] = 2q_d \otimes q_r^* \quad (3)$$

donde q_r^* es el conjugado de la parte real y $\otimes$ denota el producto de Hamilton. El resultado es un cuaternión puro cuya parte vectorial es el vector de posición. Al revisar término a término, bajo la convención adoptada se identificó que el término $q_x q_{y\varepsilon}$ de t_{34} debe ser positivo, afectando únicamente la recuperación de p_z .

$$\begin{aligned} t_{34}^{reportado} &= 2(-q_z q_{w\varepsilon} - q_y q_{x\varepsilon} - q_x q_{y\varepsilon} + q_w q_{z\varepsilon}) \\ t_{34}^{corregido} &= 2(-q_z q_{w\varepsilon} - q_y q_{x\varepsilon} + q_x q_{y\varepsilon} + q_w q_{z\varepsilon}) \end{aligned} \quad (4)$$

Validación con RoboDK

La Figura 2 muestra la estrategia de validación implementada: a partir de los mismos parámetros DH se evaluaron los modelos con MTH y CD; este último se convirtió a MTH y ambos resultados se compararon numéricamente con RoboDK [11], como referencia independiente.

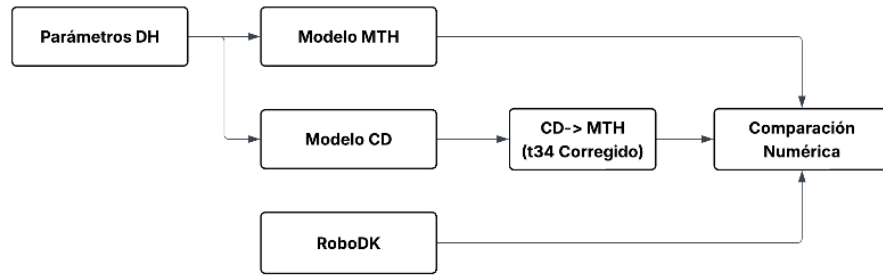


Figura 2. Cadena de validación cruzada implementada. Fuente: elaboración propia.

Se probaron cinco configuraciones articulares. La primera: $C1 = [123.4, -67.8, 45.6, -112.3, 98.7, -256.4]^\circ$, con valores no simétricos, se eligió para evitar la cancelación algebraica del término afectado. La Figura 3 muestra el robot ABB IRB120-3/0.6 en RoboDK para esta configuración; los ejes del efector final son visibles en la posición y orientación alcanzadas.

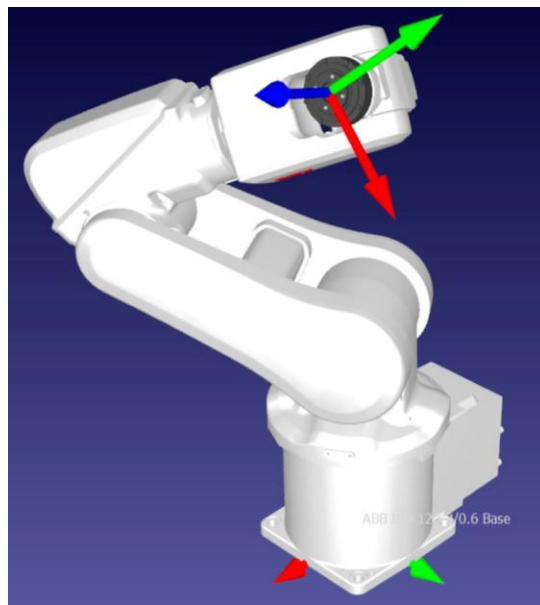


Figura 3. Robot ABB IRB120-3/0.6 en RoboDK con la configuración de prueba. Fuente: elaboración propia.

El error de posición y el error de orientación se cuantificaron mediante:

$$e_p = \|p_{\text{modelo}} - p_{\text{referencia}}\|_2 \quad (5)$$

$$e_R = \|R_{\text{modelo}} - R_{\text{referencia}}\|_F \quad (6)$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidiana y $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius.

Resultados

La Figura 4 muestra los ángulos en las articulaciones y la posición y orientación (en ángulos de Euler) en RoboDK para la configuración de prueba C1. Los valores de la posición son: $p_x = 64.392$ mm, $p_y = 21.965$ mm, $p_z = 591.825$ mm, se exportaron los valores de la matriz de transformación homogénea.

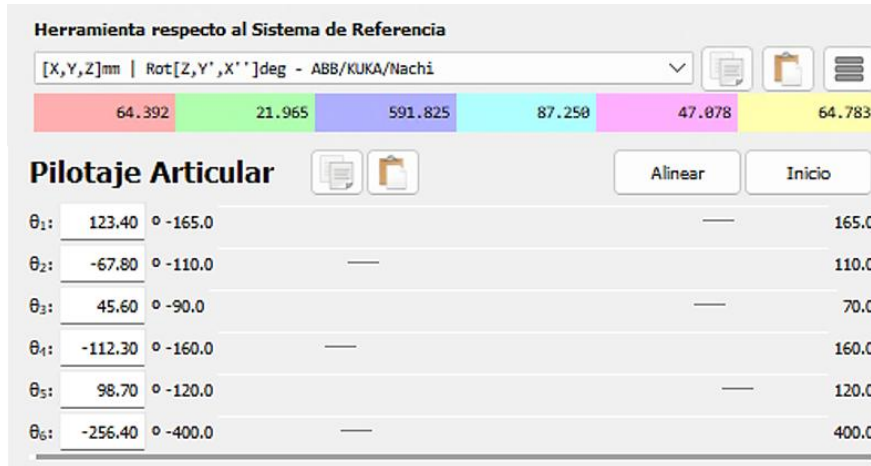


Figura 4. Posición y orientación en RoboDK para la configuración C1. Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Efecto de la corrección frente a RoboDK. Fuente: elaboración propia.

Método	p_z (mm)	e_p (mm)	e_R
MTH obtenida con DH	591.825402	2.93×10^{-7}	9.69×10^{-7}
CD con expresión original	576.142181	15.683221	9.69×10^{-7}
CD con t_{34} corregido	591.825402	2.93×10^{-7}	9.69×10^{-7}
RoboDK (valor exportado)	591.825402	—	—

La expresión original produjo un error de 15.683221 mm en p_z ; con la corrección propuesta el error se redujo a 2.93×10^{-7} mm, diferencia atribuible al truncamiento de la salida de RoboDK. La igualdad de e_R antes y después confirma que la orientación no se modificó.

Una vez aplicada la corrección se compararon las dos formulaciones para cinco configuraciones. Los errores de posición quedan entre 10^{-14} y 10^{-13} mm, y los de orientación en torno a 10^{-16} , valores propios de la precisión numérica, lo que demuestra que MTH y CD describen la misma posición y orientación cuando parten de los mismos parámetros y convenciones.

Tabla 3. Equivalencia numérica entre MTH y CD a MTH corregido. Fuente: elaboración propia.

Configuración articular (grados)	e_p (mm)	e_R
C1: [123.4, -67.8, 45.6, -112.3, 98.7, -256.4]	3.09×10^{-13}	9.70×10^{-16}
C2: [0, 0, 0, 0, 0, 0]	6.36×10^{-14}	2.37×10^{-16}
C3: [30, -45, 60, 0, 45, 90]	1.14×10^{-13}	4.44×10^{-16}
C4: [-45, 60, 45, -30, 90, 30]	2.84×10^{-14}	5.86×10^{-16}
C5: [60, 30, -60, 45, -45, 0]	1.82×10^{-13}	5.72×10^{-16}

La Tabla 4 presenta las restricciones algebraicas del cuaternión dual las cuales confirman la validez algebraica del modelo.

Tabla 4. Restricciones algebraicas del cuaternión dual. Fuente: elaboración propia.

Configuración	$ q_r - 1$	$ q_r \cdot q_d $
C1	1.11×10^{-16}	2.84×10^{-14}
C2	0	2.84×10^{-14}
C3	0	0
C4	0	7.11×10^{-15}
C5	0	1.14×10^{-13}

Como comprobación adicional de la orientación, para C1 RoboDK reportó $q_{RDK} = [0.70799, 0.12284, 0.58296, 0.37923]$ (Figura 5), y el modelo en cuaterniones duales obtuvo $q_r = [-0.70799, -0.12284, -0.58296, -0.37923]$.

Herramienta respecto al Sistema de Referencia

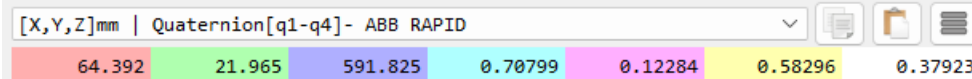


Figura 5. Cuaternión de orientación en RoboDK del robot ABB IRB120-3/0.6 con la configuración de prueba.

Como q y $-q$ representan la misma orientación, se alinearon los signos antes de realizar la comparación; el error resultante fue 5.82×10^{-6} , consistente con el redondeo de RoboDK a cinco decimales.

Conclusiones

Se derivó y validó la cinemática directa del robot ABB IRB120-3/0.6 mediante matrices de transformación homogénea y cuaterniones duales, ambos obtenidos con los mismos parámetros de Denavit-Hartenberg. La comparación entre MTH, CD y RoboDK permitió detectar y corregir un error de signo en la expresión de la conversión de CD a MTH: bajo la convención algebraica empleada, el término $q_x q_{y_e}$ de t_{34} debe ser positivo. Antes de la corrección el error en p_z fue de 15.683221 mm; después de corregirlo, ambos modelos coincidieron con RoboDK dentro de la precisión numérica. Las restricciones algebraicas del cuaternión dual se cumplieron en todas las configuraciones evaluadas, y la orientación calculada concordó con el cuaternión de referencia de RoboDK. Estos resultados establecen una base verificada para trabajos posteriores sobre implementación embebida, planificación de trayectorias y cinemática inversa del robot ABB IRB120-3/0.6.

Referencias

- [1] Spong, M. W., Hutchinson, S. y Vidyasagar, M. (2006) Robot modeling and control. Hoboken, NJ, EE. UU.: Wiley.
<https://www.wiley.com/en-us/Robot+Modeling+and+Control-p-9780471649908>
- [2] Craig, J. J. (2005) Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson.
<https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/introduction-to-robotics-mechanics-and-control/P200000003481>
- [3] Ramírez-Gordillo, J., Merchán-Cruz, E. A., Lugo-González, E., Rodríguez-Cañizo, R. G., Ponce-Reynoso, R. y Urriolagoitia-Sosa, G. (2011) 'Desarrollo de una nueva solución compacta a la cinemática de manipuladores robóticos basada en cuaterniones duales', Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 8(4), pp. 334–344. doi: 10.1016/j.riai.2011.09.012.
<https://doi.org/10.1016/j.riai.2011.09.012>
- [4] Pérez, A. y McCarthy, J. M. (2004) 'Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems', Journal of Mechanical Design, 126(3), pp. 425–435. doi: 10.1115/1.1737378.
<https://doi.org/10.1115/1.1737378>
- [5] Ramírez-Gordillo, J. (2010) Planeación de trayectorias en sistemas de manipuladores robóticos múltiples. Tesis doctoral. México: SEPI-ESIME, Instituto Politécnico Nacional.
<https://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/144>
- [6] Zivkovic, N., Vidakovic, J., Mitrovic, S. y Lazarevic, M. (2022) 'Implementation of dual quaternion-based robot forward kinematics algorithm in ROS', en Proceedings of the 11th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), pp. 1–4. doi: 10.1109/MECO55406.2022.9797160.
<https://doi.org/10.1109/MECO55406.2022.9797160>
- [7] ABB Robotics (2021) IRB 120 product specification ID: 3HAC035960-005. Västerås, Suecia: ABB AB.
<https://search.abb.com/library/Download.aspx?DocumentID=3HAC0359600001&LanguageCode=en&DocumentPartId=&Action=Launch>
- [8] Denavit, J. y Hartenberg, R. S. (1955) 'A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices', Journal of Applied Mechanics, 22(2), pp. 215–221. doi: 10.1115/1.4011045.
<https://doi.org/10.1115/1.4011045>

Hernandez, G., Márquez, C. y Sandoval, J. Modelado y validación de la cinemática directa del robot ABB IRB120-3/0.6 mediante matrices de transformación homogénea y cuaterniones duales

[9] Kenwright, B. (2012) "A beginners guide to dual-quaternions," in Proc. WSCG, 2012, pp. 1-10.
<https://cs.gmu.edu/~jmlie/teaching/cs451/uploads/Main/dual-quaternion.pdf>

[10] Zivkovic, N. Lj., Vidakovic, J. Z. y Lazarevic, M. P. (2023) 'Forward kinematics algorithm in dual quaternion space based on Denavit-Hartenberg convention', Applied Engineering Letters, 8(2), pp. 52–59. doi: 10.18485/aeletters.2023.8.2.2.
<https://doi.org/10.18485/aeletters.2023.8.2.2>

[11] RoboDK Inc. (2026) RoboDK software, versión 6.0.3, Montreal, Canadá: RoboDK Inc.
<https://robodk.com>

Referencia del artículo

- [1] Hernandez, G., Márquez, C. y Sandoval, J. (*julio - agosto, 2026*). *Modelado y validación de la cinemática directa del robot ABB IRB120-3/0.6 mediante matrices de transformación homogénea y cuaterniones duales. Boletín UPIITA. año 21, (115) 2026.*