

CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DEL VECTOR DE ESTADO PARA UN SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA

Rogelio Ernesto García Chávez¹
Frida Mairyn Galan Salazar²

Erik Reyes Reyes¹
Ramón Silva Ortigoza¹

Ángel Adrián Orta Quintana¹
Magdalena Marciano
Melchor¹

¹Instituto Politécnico Nacional
CIDETEC

Laboratorio de Mecatrónica y Energías Renovables
²CECyT 10

rgarciac1301@alumno.ipn.mx

RESUMEN

La aplicación de algoritmos de control automático que pertenecen a la vertiente clásica de la disciplina, no son aplicables en modelos dinámicos que poseen el carácter de no lineal. En ese sentido, es necesario desarrollar estrategias que permitan superar el problema inherente a las dinámicas no lineales. Dicho lo anterior, en el presente trabajo se hace uso de la metodología de linealización aproximada y se lleva a cabo un control por retroalimentación del vector de estados aplicado a un sistema de levitación magnética en el software Matlab Simulink.

1. Introducción

En la teoría de control clásico los esquemas de control, resultan inútiles en la consecución de la tarea de regulación, cuando se trata de sistemas que poseen no linealidades inherentes a su naturaleza dinámica [1]. De esta manera, es por demás importante entender que, en la búsqueda de imponer dinámicas deseadas en sistemas de naturaleza física, que por lo general son de carácter no lineal, es necesario obtener una linealización aproximada de los mismos, con miras a poder aplicar estrategias de control clásico. Sin embargo, cabe mencionar que la capacidad de resolver la tarea de regulación se verá bastante limitada al solo tener valía sobre un rango dinámico muy ínfimo. En este sentido, es digno de resaltar que muy a pesar de esta gran limitación, el control de procesos no lineales en el sector industrial, se lleva haciendo de esta manera por los últimos 30 años [2]. En consecuencia, resulta de gran interés el estudio de un algoritmo de control que haga uso del modelo lineal, para poder así controlar el modelo no lineal que represente de manera más fiel al fenómeno físico bajo estudio. Es así como la estrategia conocida como control por retroalimentación de estados es una excelente opción que nos permite estabilizar todos y cada uno de los modos del sistema a sus valores en equilibrio, haciendo uso del modelo lineal, para la propuesta de un controlador de naturaleza no lineal.

Motivados por lo ahora expuesto, en el presente trabajo se muestra el desarrollo de un control por retroalimentación del vector de estados aplicado a la planta conocida como sistema de levitación magnética y en complemento, la ley de control se verifica con resultados a nivel simulación numérica en Matlab Simulink. Lo que resta del trabajo se estructura de la siguiente manera: la Sección 2 aborda la representación del sistema en variables de estado. Por otro lado, la Sección 3 presenta una aproximación en primer orden y se verifica la controlabilidad del sistema. En la Sección 4 se desarrolla paso a paso el diseño de la estrategia de control. Mientras que la Sección 5 expone los resultados de simulación del sistema en lazo cerrado. Por último, en la Sección 6 se dan las conclusiones del trabajo.

2. Modelo dinámico y punto de equilibrio

El modelo del sistema de levitación magnética tiene su representación en variables de estado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u\end{aligned}\tag{1}$$

Cuyo punto de equilibrio parametrizado a un valor deseado X de la distancia, es el siguiente.

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{x}_1(X) = X; \\ x_2 &= \bar{x}_2 = 0; \\ x_3 &= \bar{x}_3(X) = \sqrt{\frac{mgX}{c}};\end{aligned}$$

$$u = \bar{u}(X) = R \sqrt{\frac{mgX}{c}}$$

3. Modelo aproximado en primer orden y controlabilidad de la planta

Tras someter al sistema (1) a un proceso de linealización aproximada alrededor de su punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales determinado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta \\ y_\delta &= Cx_\delta\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{\bar{X}} & 0 & -2\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{\bar{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\bar{L}} \end{pmatrix} u_\delta \\ y_\delta &= (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

El cual tiene definidas sus variables incrementales de la siguiente manera:

$$x_{1\delta} = x_1 - \bar{X}; \quad x_{2\delta} = \dot{x}_1; \quad x_{3\delta} = x_3 - \sqrt{\frac{mg\bar{X}}{c}}; \quad u_\delta = u - R \sqrt{\frac{mg\bar{X}}{c}}$$

De esta forma, procedemos a demostrar que el sistema incremental ahora obtenido es controlable mediante una estrategia de control por retroalimentación constante del vector de estados, esto mediante la obtención su matriz de controlabilidad:

$$C = [B : AB : \dots : A^{n-1}B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{\bar{L}}\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} \\ 0 & -\frac{2}{\bar{L}}\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} & \frac{2R}{\bar{L}^2}\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} \\ \frac{1}{\bar{L}} & -\frac{R}{\bar{L}^2} & \frac{R^2}{\bar{L}^3} \end{pmatrix}$$

y en consecuencia de que

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{\bar{L}}\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} \\ 0 & -\frac{2}{\bar{L}}\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} & \frac{2R}{\bar{L}^2}\sqrt{\frac{cg}{m\bar{X}}} \\ \frac{1}{\bar{L}} & -\frac{R}{\bar{L}^2} & \frac{R^2}{\bar{L}^3} \end{pmatrix} = -\frac{4cg}{\bar{L}^3 m\bar{X}} \neq 0$$

se puede entonces concluir que el sistema incremental es controlable.

4. Diseño de un control por retroalimentación de estados para un sistema de levitación magnética

Ahora que sabemos que el sistema incremental es controlable, proponemos una ley de control por retroalimentación del vector de estados:

$$u_\delta = -Kx_\delta$$

Al instaurar esta ley a nuestro sistema incremental, obtenemos así la dinámica en lazo cerrado siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{X} & 0 & -2\sqrt{\frac{cg}{mX}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_\delta \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{X} & 0 & -2\sqrt{\frac{cg}{mX}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} (-K_1x_{1\delta} - K_2x_{2\delta} - K_3x_{3\delta}) \\ \begin{pmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{X} & 0 & -2\sqrt{\frac{cg}{mX}} \\ -\frac{K_1}{L} & -\frac{K_2}{L} & -\frac{R}{L} - \frac{K_3}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El sistema en lazo cerrado ahora obtenido tiene su representación en el espacio de la frecuencia en su polinomio característico dado por:

$$\begin{aligned} p_{A-BK} &= \det(sI - A') \\ &= s^3 + \left(\frac{R}{L} + \frac{K_3}{L}\right)s^2 + \left(-\frac{2K_2}{L}\sqrt{\frac{cg}{mX}} - \frac{g}{X}\right)s + \left(-\frac{2K_1}{L}\sqrt{\frac{cg}{mX}} - \frac{g}{X}\left(\frac{R}{L} + \frac{K_3}{L}\right)\right) \end{aligned}$$

Con esta representación polinómica podemos fácilmente imponer una dinámica estable al sistema incremental en lazo cerrado, con su igualación término a término con un polinomio del tipo Hurwitz. Para esta tarea, se propone el siguiente polinomio deseado:

$$p_d(s) = (s + \alpha)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + (2\xi\omega_n + \alpha)s^2 + (\omega_n^2 + 2\alpha\xi\omega_n)s + \alpha\omega_n^2$$

A continuación, se muestra el procedimiento de igualación entre el polinomio característico del sistema lineal en lazo cerrado y el polinomio deseado $p_d(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} + \frac{K_3}{L} &= (2\xi\omega_n + \alpha) \\ -\frac{2K_2}{L}\sqrt{\frac{cg}{mX}} - \frac{g}{X} &= (\omega_n^2 + 2\alpha\xi\omega_n) \\ -\frac{2K_1}{L}\sqrt{\frac{cg}{mX}} - \frac{g}{X}\left(\frac{R}{L} + \frac{K_3}{L}\right) &= \alpha\omega_n^2 \end{aligned}$$

Finalmente, poniendo las ecuaciones resultantes en términos de K_1 , K_2 y K_3 , se tiene:

$$K_1 = -\frac{L \left[\alpha \omega_n^2 + \frac{g}{X} \left(\frac{R}{L} + \frac{(2\xi\omega_n + \alpha)L - R}{L} \right) \right]}{2\sqrt{\frac{cg}{mX}}}$$

$$K_2 = -\frac{L \left[\omega_n^2 + 2\alpha\xi\omega_n + \frac{g}{X} \right]}{2\sqrt{\frac{cg}{mX}}}$$

$$K_3 = (2\xi\omega_n + \alpha)L - R$$

Partiendo de la estrategia de control propuesta y recordando la relación entre las variables del sistema incremental y de las variables del sistema original no lineal, se puede encontrar un controlador que resuelva la tarea de regulación en la dinámica no lineal representada en variables de estado.

Retomando la ley de control

$$u_\delta = -K_1 x_{1\delta} - K_2 x_{2\delta} - K_3 x_{3\delta}$$

cuyas variables incrementales se encuentran definidas por

$$x_{1\delta} = x_1 - X; \quad x_{2\delta} = x_2; \quad x_{3\delta} = x_3 - \sqrt{\frac{mgX}{c}}; \quad u_\delta = u - R \sqrt{\frac{mgX}{c}}$$

se tiene la expresión siguiente para el control u :

$$u = -K_1(x_1 - X) - K_2 x_2 - K_3 \left(x_3 - \sqrt{\frac{mgX}{c}} \right) + R \sqrt{\frac{mgX}{c}}$$

Finalmente, el controlador lineal, expresado en términos de las variables de estado originales del sistema no lineal queda expresado de la manera siguiente:

$$u = \left(\frac{L \left[\alpha \omega_n^2 + \frac{g}{X} \left(\frac{R}{L} + \frac{(2\xi\omega_n + \alpha)L - R}{L} \right) \right]}{2\sqrt{\frac{cg}{mX}}} \right) (x_1 - X) + \left(\frac{L \left[\omega_n^2 + 2\alpha\xi\omega_n + \frac{g}{X} \right]}{2\sqrt{\frac{cg}{mX}}} \right) x_2 - ((2\xi\omega_n + \alpha)L - R) \left(x_3 - \sqrt{\frac{mgX}{c}} \right) + R \sqrt{\frac{mgX}{c}}$$

5. Resultados de simulación en lazo cerrado

Los parámetros del sistema no lineal empleados en la simulación son:

$$R = 1 \, \Omega, \quad L = 0.01 \, \text{H}, \quad g = 9.81 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad m = 0.1 \, \text{kg},$$

$$c = 1, \quad X = 0.05 \, \text{m}.$$

También se consideraron las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = (0.80)\bar{x}_1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

Para el diseño del control u se tomaron los siguientes valores:

$$\alpha = 100, \quad \xi = 5, \quad \omega_n = 40.$$

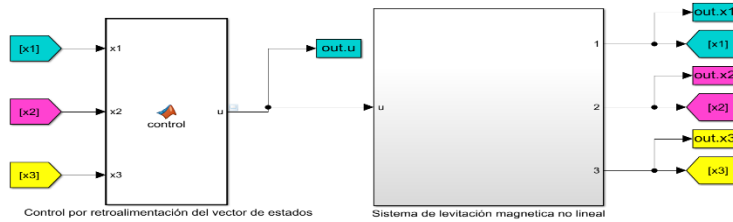


Figura 1. Diagrama a bloques del sistema no lineal en lazo cerrado.

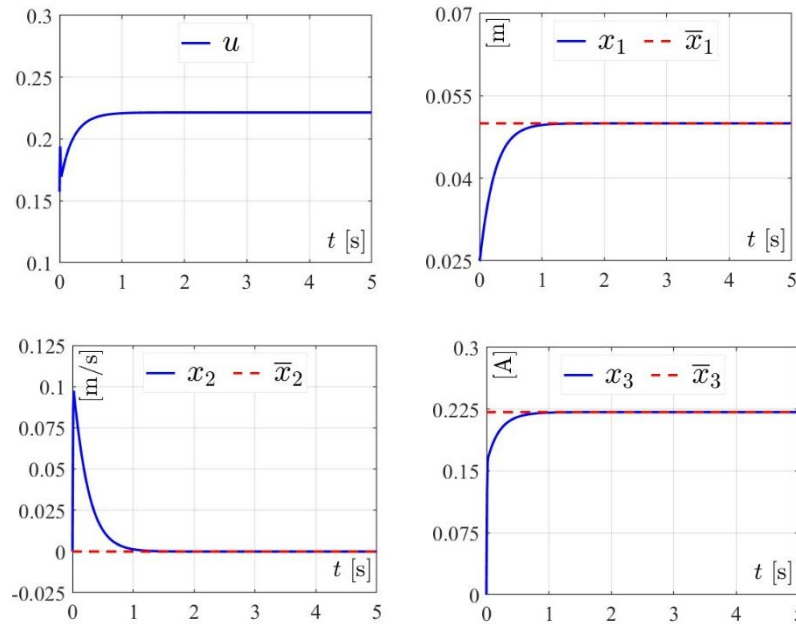


Figura 2. Control u y variables de estado del sistema no lineal en lazo cerrado.

4. Conclusiones

Derivado de los resultados obtenidos en la Figura 2, en los cuales se ve claramente que las variables de estado del sistema (1) en lazo cerrado después de un transitorio tienden a su valor en equilibrio, se puede concluir que la tarea de regulación se logra. En otras palabras, tras la inyección de la ley de control diseñada, se consigue que los tres modos del sistema (x_1, x_2, x_3) tiendan con el devenir del tiempo a sus valores en equilibrio ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$).

Referencias

- [1] H. Sira-Ramírez, R. Márquez, F. Rivas-Echeverría, and O. Llanes-Santiago. (2005). Control de Sistemas No Lineales: Linealización aproximada, extendida, exacta. Pearson Prentice Hall.
- [2] H. Sira-Ramírez and R. Silva-Ortigoza. (2006). Control Design Techniques in Power Electronics Devices. London, U.K.: Springer-Verlag