

Descripción, modelo, análisis y control del Pendubot

Miguel Gabriel Villarreal-Cervantes^{1*}, Carlos Alberto Cruz-Villar² y Jaime Álvarez-Gallegos²

¹Departamento de Posgrado, Sección de Mecatrónica, CIDETEC-IPN. Av. Juan de Dios Bátiz s/n
Esq. Miguel Othon de Mendizabal, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, C.P. 07700.

²Departamento de Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN. Av. IPN 2508, C.P. 07360.

Correo electrónico: mvillarrealc@ipn.mx

Resumen

Este trabajo se analiza un robot subactuado y se controla en una posición de equilibrio inestable. El robot subactuado a analizar y controlar es el Pendubot. Se describe y explica el funcionamiento de cada parte que conforma el sistema experimental (computadora, tarjetas electrónicas, sensores, actuadores y pendubot) con el propósito de asegurar una completa caracterización que permita a su vez obtener resultados experimentales similares a los obtenidos en simulación. Además se proporcionan algunas cuestiones prácticas para el buen funcionamiento del sistema y se propone una ley de control lineal para la estabilización vertical del Pendubot.

1. Introducción

La obtención de un buen modelo matemático de un sistema permite predecir su comportamiento en todo el tiempo. Conocer el funcionamiento y características físicas de las partes que conforman al sistema, son factores claves para llevar con éxito los resultados matemáticos a resultados experimentales. Por tal motivo, en este trabajo se describe y explica cada parte física que conforma el sistema y se obtiene el modelo dinámico del Pendubot. Además, se encuentran los puntos de equilibrio del Pendubot y se linealiza alrededor de uno de ellos. Se analizan algunas propiedades del modelo linealizado como la controlabilidad y la observabilidad, con el propósito de desarrollar una ley de control lineal. Finalmente se mostrarán los resultados experimentales con dicho prototipo para su estabilización vertical.

2. Descripción del Sistema Experimental

El sistema que se encuentra en el Laboratorio, consta de un brazo robótico subactuado de dos grados de libertad (pendubot [2]), sensores de posición angular de los eslabones, sensor de corriente del motor, un motor de corriente directa (CD), tarjetas electrónicas para adquirir la lectura de los sensores y para manipular el motor y una computadora personal como se muestra en la Figura 1.

Para dar una mayor claridad y orden al contenido de este artículo, se describe el sistema experimental en sus partes principales: sistema mecánico, sensores, actuadores, interfaces electrónicas y sistema de cómputo.

*Dr. MGVC agradece el soporte económico recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN (SIP-IPN), a través del proyecto 20110165, y de los programas EDI y COFAA del IPN, así como del Sistema Nacional de Investigación (SNI).

Al obtener los desplazamientos angulares, es posible estimar numéricamente la velocidad angular de los eslabones (V_m) utilizando la siguiente expresión:

$$V_m(t)|_{t=t_i} = \frac{q(t_i) - q(t_{i-1})}{\Delta t}$$

donde $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ es el periodo de muestreo, i es el número de muestra y $q(t) = [q_1(t), q_2(t)]^T$ es la posición angular de los eslabones 1 y 2 respectivamente, t_i y t_{i-1} es el tiempo en el instante i y en el instante $i - 1$, respectivamente.

2.2.2. Sensor de Corriente

Se utilizó un sensor de efecto Hall fabricado por LEM (modelo HAW 15-P), que sensa la corriente suministrada al motor del pendubot, cuyas características de interés para este trabajo son:

- Voltaje de alimentación de $\pm 15 \text{ volts}$.
- Corriente r.m.s nominal máxima sensada de entrada $\pm 15 \text{ Amperes}$.
- Voltaje de salida máxima $\pm 4 \text{ volts}$

La Relación entrada (*Amps*) – salida (*volts*) del sensor es de $\pm 3,75 \text{ Amp}$ es a $\pm 1 \text{ volt}$.

Para más detalle, ver [10].

2.3. Actuadores

2.3.1. Motor de CD

El Motor de CD se encuentra acoplado al primer eslabón del pendubot, es de imán permanente y fue diseñado por Terry Larson de Minessota Electric Technology (modelo 3B-9013182D). Tiene un voltaje máximo de entrada de $\pm 90 \text{ volts}$ y una corriente máxima de entrada de $\pm 10,5 \text{ Ampere}$.

Algunos de los parámetros físicos del motor como la constante de par del motor k_m , la constante de la fuerza contra-electromotriz k_e y la resistencia de armadura R_a fueron encontrados en las hojas de datos (ver [10]); estos son:

Tabla 3.1: Parámetros físicos del motor encontrados en las hojas de datos.

Motor Frío $20^\circ C$	Motor Caliente $70^\circ C$
$k_m = 56,74 \frac{\text{Oz-in}}{\text{Amp}} = 0,4 \frac{\text{N-m}}{\text{Amp}}$	$k_m = 51,35 \frac{\text{Oz-in}}{\text{Amp}} = 0,4 \frac{\text{N-m}}{\text{Amp}}$
$k_e = 42,03 \frac{\text{volts}}{\text{krpm}} = 0,40136 \frac{\text{volts}}{\text{rad/seg}}$	$k_e = 38,03 \frac{\text{volts}}{\text{krpm}} = 0,36316 \frac{\text{volts}}{\text{rad/seg}}$
$R_a = 8,3080 \Omega$	$R_a = 10,25 \Omega$

2.4. Interfaces Electrónicas

2.4.1. Lector de Decodificadores

La Tarjeta 5312B del fabricante Technology 80 sirve de interfaz para registrar la lectura de los decodificadores ópticos en la PC, utilizando lenguaje de programación en C. Tiene dos entradas para decodificadores con un modo de cuadratura X4, que incrementa la resolución de los decodificadores por 4, produciendo 4096 conteos por revolución; tiene inmunidad al ruido y capacidad de contar los pulsos generados por el desplazamiento angular en las dos direcciones (sentido horario y antihorario) por medio de un contador preconfigurado de 24 bits y una dirección base configurada a $0x20AH$ (ver [10]).

Para hacer uso de la tarjeta 5312B es necesario incluir en el proyecto la librería "TE5312S.lib" así como incluir en el programa principal en C las librerías "TE5312.h" y "ENCB.D.h".

La forma en que se obtuvieron las mediciones de los decodificadores es la siguiente:

- 1.- Inicializar la tarjeta 5312B con la función "*init_enc()*".
 - 2.- Leer los pulsos generados por el desplazamiento rotacional con la función "*ReadCntr (Canal a leer)*".
 - 3.- Convertir los pulsos generados a radianes, con una regla de 3 simple $\frac{(2\pi)(\text{pulsos generados})}{4096\text{pulsos/rev}}$.
- Esta forma de obtener las mediciones de los decodificadores se puede observar en cualquier programa en C de [10].
- Para más información, consulte el CD de [10].

2.4.2. Interfaz del Motor de CD

El manejo del motor de CD se realiza por medio de un servo-amplificador miniatura MSA-12-80 que tiene la técnica PWM a altas frecuencias de conmutación ($36kHz$). El servo-amplificador es construido por Gail Motion Control; cuenta con tres modos de operación: corriente, voltaje o velocidad, que son configurados al mover dos interruptores SW1 y SW3 como se muestra en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2: Modo de operación del servo-amplificador MSA-12-80.

Modo	SW1	SW2	SW3	SW4
Corriente	APAG	APAG	ENC	X
Voltaje	ENC	APAG	APAG	X
Velocidad	APAG	APAG	APAG	X

APAG = Apagado, ENC = Encendido, X = No importa

Cada modo de operación tiene una relación diferente entrada - salida, en modo corriente proporciona una salida de $\pm 12Amps$ máximo y en modo voltaje $\pm 80volts$ máximo cuando tiene un voltaje de entrada de $\pm 10volts$, pero está limitado al tipo de fuente de alimentación no regulada de DC (CPS-6-48) que se cuenta. Esta fuente debería proporcionar $6Amps$ y $48volts$ máximos continuos pero en forma experimental proporciona $5,3Amps$ y $50volts$ máximos continuos.

Para ajustar las ganancias y otras variables de las tarjetas se dispone de cuatro potenciómetros:

Tabla 3.3: Aplicación de los potenciómetros del servo-amplificador MSA-12-80.

Número de Potenciómetro	Aplicación
1 Ganancia de lazo	Incrementa la ganancia del amplificador conforme incrementa la rotación en el sentido horario. La ganancia es 1 al extremo de rotación en el sentido antihorario.
2 Límite de corriente	Incrementa el límite de corriente conforme incrementa la rotación en el sentido horario.
3 Ganancia de entrada de referencia	Incrementa la ganancia de entrada conforme incrementa la rotación en el sentido horario. La ganancia es 1 al extremo de rotación en el sentido antihorario.
4 Voltaje de compensación	Permite corregir desvíos en las variables de entrada-salida a cero.

Para hacer uso del servo-amplificador es necesario calibrarlo primero; para esto se establece la ganancia de lazo y la ganancia de entrada de referencia a 1, el límite de corriente incrementarlo hasta el máximo posible y corregir cualquier desvío de entrada - salida; ésto se hace al proporcionar una entrada de $0volts$, si la salida no es cero, se debe girar en ambos sentidos el potenciómetro 4 hasta que proporcione un voltaje de salida de $0volts$.

Con el propósito de poder cambiar el voltaje o corriente de salida del servo-amplificador desde la PC, se utilizó una tarjeta DAC-02 fabricado por Keithley Metrabyte que convierte señales digitales en analógicas para así usarlo como señal de entrada al servo-amplificador. La tarjeta DAC-02

tiene dos convertidores digitales a analógicos de 12 bits de resolución con rangos de salida de $+5, +10, \pm 5, \pm 10 \text{ volts}$ y cuenta con una dirección base reprogramable por medio de DIP switch entre otras cosas (ver [10]).

El DAC-02 es programado por medio del lenguaje C y es configurado para trabajar con el DAC 0 para una salida bipolar de $\pm 10 \text{ volts}$ y una dirección base $0x310H, 0x311H$, en el cual se encuentra el byte bajo y alto respectivamente de la señal digital a convertir a señal analógica.

Para hacer uso del DAC-02, que a su vez manipula la salida al motor, es necesario incluir en el programa principal en C la librería "*DACBD.h*", ésta contiene una función "*dac(nivel de salida, modo de operación)*" en donde "*nivel de salida*" es la señal de salida que se desea en el DAC 0 y "*modo de operación*" indica si está trabajando el servo-amplificador en modo corriente (1) o modo voltaje (0). El parámetro "*modo de operación*" fija los límites reales correspondientes ($5,3 \text{ Amps}$ o 50 volts) de salida de DAC (ver [10]).

La forma en que se controla el motor es la siguiente:

1.- Hacer una relación del voltaje de entrada del servo-amplificador con la salida deseada, esto es:

Tabla 3.4: Relación de entrada-salida del servo-amplificador MSA-12-80.

$\pm 10 \text{ Volts de entrada} = \pm 12 \text{ Amps de salida}$	
Voltaje de entrada = Corriente deseada en la salida	
$\text{Voltaje de entrada} = \frac{(\text{Corriente deseada en la salida})(10)}{12} \text{ volts}$	
"o"	
$\pm 10 \text{ Volts de entrada} = \pm 80 \text{ Volts de salida}$	
Voltaje de entrada = Voltaje deseado en la salida	
$\text{Voltaje de entrada} = \frac{(\text{Voltaje deseado en la salida})(10)}{80} \text{ volts}$	

2.- Enviar el voltaje de entrada dependiendo del modo de operación (ver Tabla 3.4) a la función "*dac*",

$$dac(\text{voltaje de entrada}, \text{modo de operación})$$

Esta manera de mantener un voltaje o corriente en el motor se puede observar en cualquier programa en lenguaje en C de [10].

2.4.3. Lector del Sensor de Corriente

Se diseñó y construyó una interfaz que lee, por medio del puerto paralelo en lenguaje C, la corriente suministrada al motor del pendubot. Esta consta de un sensor de efecto Hall cuyas características se mostraron en la Sección 2.2.2, dos amplificadores operacionales *LM741*, un convertidor analógico-digital *ADC0802* y ocho resistencias de $10k\Omega$, para más detalle ver las hojas de datos de [10].

En la fig 3 se muestra el diagrama completo de la interfaz utilizada para adquirir la corriente medida por el sensor de efecto Hall *HAW 15-P*.

La corriente máxima que se puede suministrar al motor está limitada por la fuente de alimentación de DC (*CPS-6-48*), como se muestra en la Sección 2.4.2. Por tal motivo es posible conocer el voltaje de salida máximo que puede proporcionar el sensor de efecto Hall (consultar la relación mostrada en la Sección 2.2.2) que es

$$\pm 5,3 \text{ Amp de entrada} = \pm 1,41 \text{ volts de salida del sensor de efecto Hall} \quad (1)$$

Este voltaje de salida se suma a $2,5 \text{ volts}$ por medio de un amplificador operacional configurado en modo sumador (CI2 de la Figura 3) con el propósito de eliminar el voltaje negativo del sensor de

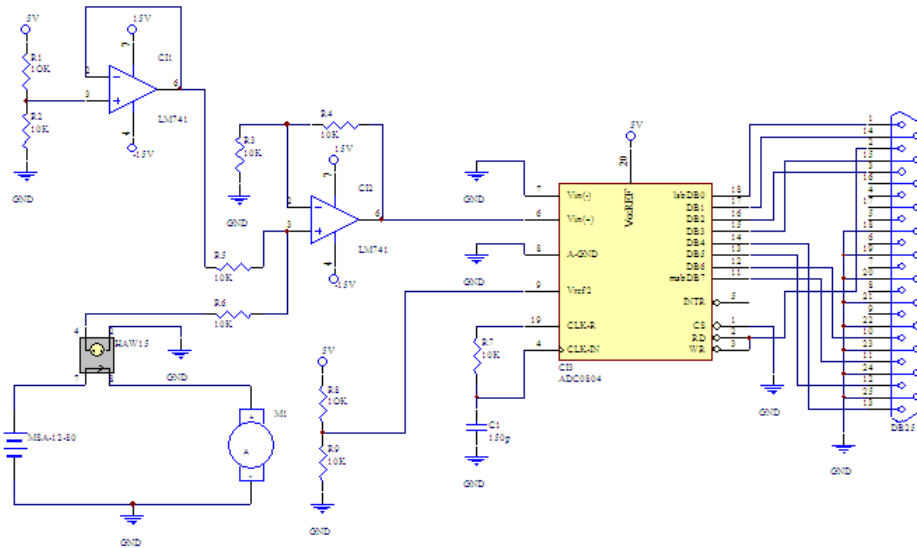


Figura 3: Diagrama esquemático de la interfaz del sensor de corriente.

efecto Hall *HAW 15-P* y así sensorarlo por el puerto paralelo por medio de un convertidor analógico-digital (ADC).

La interfaz es programada en lenguaje C. Para hacer uso de la interfaz que sensa la corriente, es necesario incluir en el programa principal la librería "*OTROS.h*" (ver [10]), el cual contiene la función "*corriente()*" que devuelve la corriente real suministrada al motor.

La manera en que se lee la corriente es la siguiente:

1.- Activar el bit para hacer una escritura y lectura del ADC por medio del bit 0 del puerto de datos del puerto paralelo.

```
outp(0x378,0x1)
outp(0x378,0x0)
```

2.- Leer la corriente con la función "*corriente()*".

2.5. Sistema de Cómputo

El pendubot cuenta con una computadora pentium a 75MHz con 40MB de RAM y capacidad de disco duro de 1.96GB que se encargará de procesar las señales y hacer el control, por tal motivo es necesario tener un periodo de muestreo máximo de 10ms. El paquete de software "*PC Timer Tools*" diseñado por Ryle y programado en lenguaje C, incluye un algoritmo de alarma que puede ser usado para producir un periodo apropiado de muestreo mínimo de 5ms¹.

Para hacer uso de este algoritmo es necesario incluir al proyecto los programas "*TALARM.c*" y "*TKERNEL.c*", así como incluir en el programa principal las librerías "*PCHRT.h*" y "*CTRBD.h*".

El periodo de muestreo puede ser cambiado al modificar las definiciones *ALARMTIME* y *PERIODO* que se encuentra en la librería *CTRBD.h* (ver [10]), como se muestra en la Tabla 3.5:

¹Se puede programar PC Timer Tools para dar un muestreo menor a 5ms pero no es preciso, por tal razón no fue utilizado.

Tabla: 3.5: Configuración del tiempo de muestreo.

Tiempo de Muestreo	Definición ALABMTIME	Definición PERIODO
5ms	5000L	0,005
10ms	10000L	0,010

3. Modelo y Análisis del Sistema

3.1. Modelo Dinámico del Pendubot

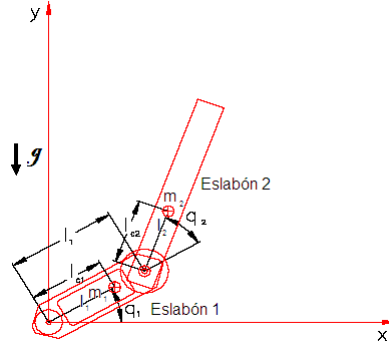


Figura 4: Diagrama esquemático del pendubot.

El robot subactuado de dos uniones llamado Pendubot (PENDUlum roBOT) se ha usado ampliamente en la investigación de control no lineal y para la educación en varios conceptos como comportamiento de sistemas caóticos, robótica, diseño de sistemas de control entre otros. Está formado por dos eslabones rígidos de longitudes l_1 y l_2 y masas m_1 y m_2 respectivamente. El primer eslabón (hombro) es actuado directamente por un motor de CD (unión activa) y el segundo eslabón (codo) no cuenta con actuador (unión pasiva) por lo que se mueve libremente alrededor del eslabón uno. Los desplazamientos angulares del robot se llevan acabo en el plano vertical $x - y$ (Figura 4). La distancia entre los ejes de giro y los centros de masa se denotan por l_{c1} y l_{c2} respectivamente. I_1 e I_2 expresan los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masa y que son perpendiculares al plano $x - y$.

Los *g.d.l* (grados de libertad) o coordenadas generalizadas están asociados a los ángulos q_1 -que se miden desde la posición vertical (eje x) hasta el eslabón 1- y q_2 -que se miden a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2-, siendo ambos positivos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El desarrollo de las ecuaciones de movimiento del pendubot están disponibles en los trabajos desarrollados en [5], [7], los cuales utilizan el formalismo de Euler-Lagrange, así el Lagrangiano L es una función que se define como la diferencia entre las energías cinéticas E_c y potenciales E_p de un sistema electromecánico (pendubot):

$$L(q, \dot{q}) = E_c(q, \dot{q}) - E_p(q, \dot{q}) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (3)$$

donde $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t)]^T$ y $\dot{q} = [\dot{q}_1(t) \ \dot{q}_2(t)]^T$ es un vector de posiciones y de velocidades angulares respectivamente y $\tau = [\tau_1 \ 0]^T$ es el vector con las componentes de par del pendubot.

Utilizando la ec. 3 se llega en forma matricial a las ecuaciones de movimiento del pendubot:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (4)$$

en donde:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, G(q) = [\phi_1 \quad \phi_2]^T, \tau = [\tau_1 \quad 0]^T$$

$D(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis, $G(q)$ es el vector con las componentes de gravedad, τ es el vector con las componentes de par.

Los elementos de las matrices son:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \Theta_1 + \Theta_2 + 2\Theta_3 \cos(q_2) \\ D_{12} &= \Theta_2 + \Theta_3 \cos(q_2) \\ D_{21} &= D_{12} \\ D_{22} &= \Theta_2 \\ C_{11} &= -\Theta_3 \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ C_{12} &= -\Theta_3 \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ C_{21} &= \Theta_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) \\ C_{22} &= 0 \\ \phi_1 &= \Theta_4 g \cos(q_1) + \Theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \phi_2 &= \Theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

donde los parámetros Θ estan dados por:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \Theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \Theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \Theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \Theta_5 &= m_2 l_{c2} \end{aligned}$$

Ya que $D(q)$ es una matriz simétrica definida positiva, existe $D(q)^{-1}$ [9] que permite expresar el modelo dinámico del Pendubot de la ecuación ec. (4) en términos del vector de estado $[q \quad \dot{q}]^T$ de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ D(q)^{-1}[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde:

$$D(q)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2} & -\frac{D_{12}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2} \\ -\frac{D_{21}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2} & \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2} \end{bmatrix}$$

Proponiendo el siguiente vector de estado:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

donde x_1, x_2 son los ángulos y x_3, x_4 son las velocidades angulares de los eslabones 1 y 2 respectivamente.

La ecuación 5 en representación de estados es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_p(x, u) = \dot{f}_p(x) + \dot{g}_p(x)u \\ y &= h_p(x)\end{aligned}\tag{6}$$

en donde y es la salida del sistema.

$$\begin{aligned}\dot{f}_p(x) &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{D_{12}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2}(-\phi_2 - x_3C_{21}) + \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2}(-\phi_1 - x_3C_{11} - x_4C_{12}) \\ \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2}(-\phi_2 - x_3C_{21}) - \frac{D_{21}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2}(-\phi_1 - x_3C_{11} - x_4C_{12}) \end{bmatrix} \\ \dot{g}_p(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2} \\ -\frac{D_{21}}{D_{11}D_{22}-D_{12}^2} \end{bmatrix} \\ u &= \tau_1 \\ h_p(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.2. Dinámica del Motor

Ya que las ecuaciones de movimiento del pendubot (ec. (6)) no contemplan al motor, es necesario modelarlo para así incluirlo en el modelo completo. Hay dos formas para modelar al motor: estática y dinámicamente.

El modelo estático del motor [8] es una forma sencilla y no muy precisa que puede incluirse fácilmente en el modelo del pendubot, como se muestra a continuación:

$$\tau_1 = k_m i_a\tag{7}$$

donde k_m es la constante de par del motor e i_a es la corriente de armadura.

El modelo dinámico del motor incluye todos los parámetros físicos involucrados del motor y hace una mayor aproximación a la realidad.

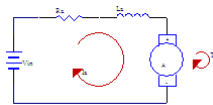


Figura 5: Modelo dinámico del motor

Aplicando la LVK (ley de voltaje de Kirchhoff) al circuito de la Figura 5 se obtiene

$$\begin{aligned}L_a \dot{i}_a + R_a i_a + k_e \dot{q}_m &= V_{in} \\ J_o \ddot{q}_m + b_o \dot{q}_m &= \tau_1 = k_m i_a\end{aligned}\tag{8}$$

donde L_a es la inductancia de armadura, k_e es la constante de la fuerza contra-electromotriz, V_{in} es el voltaje de entrada de armadura, b_o es el coeficiente de fricción viscosa referido a la flecha, R_a es la resistencia de armadura, J_o es la inercia del motor referida a la flecha del motor, $q_m, \dot{q}_m, \ddot{q}_m$ son las posiciones, velocidades y aceleraciones del rotor respectivamente.

El modelo del motor sin carga en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_o}{J_o} & \frac{k_m}{J_o} \\ 0 & -\frac{k_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \tilde{u}_1 \quad (9)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

donde $\tilde{x}_1 = q_m$ y $\tilde{x}_2 = \dot{q}_m$ es la posición y velocidad angular de la flecha del motor respectivamente, $\tilde{x}_3 = i_a$ es la corriente de armadura del motor, $\tilde{u}_1 = V_{in}$ es el voltaje de entrada al motor y $\tilde{y}$ es la salida del sistema.

Uno de los inconvenientes al utilizar este modelo (ec. (8)) es que no se tienen todos los parámetros físicos del motor (ver Tabla 3.1), por lo que es necesario utilizar un método de identificación de sistemas para encontrar los parámetros faltantes (L_a, J_o, b_o), lo cual se presenta a continuación.

3.2.1. Estimación de los Parámetros del Motor por el SITM

Se utilizó las herramientas de identificación de sistemas (System Identification Toolbox[®]) de Matlab[®] (SITM) para obtener dichos parámetros.

Para poder utilizar el modelo en variables de estado de la ec. (9) en el SITM es necesario tener el modelo de la siguiente forma, tomando en cuenta que $\tilde{y}$ contiene a todas las variables sensadas o medidas, aclarando que la velocidad se obtiene numéricamente y se considera medida:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u_1 \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u_1 \end{aligned} \quad (10)$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_o}{J_o} & \frac{k_m}{J_o} \\ 0 & -\frac{k_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuyas relaciones de parámetros a estimar son:

$$\frac{b_0}{J_0}, \frac{k_m}{J_0}, \frac{k_e}{L_a}, \frac{R_a}{L_a}, \frac{1}{L_a} \quad (11)$$

Estos datos (ec. (10) y ec. (11)), junto con los datos medidos experimentalmente (posición y corriente del motor) y los datos estimados numéricamente (velocidad) son suficientes para el System Identification Toolbox[®] de Matlab[®] (SITM). Para mayor detalle de sistemas de identificación ver [1] o el tutorial de SITM.

En [10] se presenta el programa para adquirir la posición, velocidad angular y corriente del motor, con un tiempo de muestreo de $5ms$ y una entrada de voltaje bipolar al motor de $\pm 50V$ CD con periodos de 0.2, 0.4, 0.1, 0.6, 0.1, 0.5 segundos, cuya secuencia es repetida hasta completar un tiempo de $5s$ como se observa en la Figura 6.

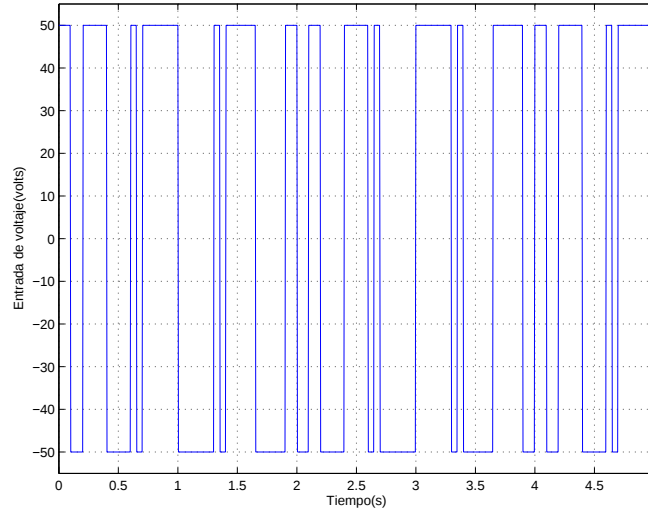


Figura 6: Señal de entrada utilizada para la identificación de los parámetros del motor

Este programa a su vez almacena los datos obtenidos en un archivo que puede ser leído a través de Matlab[®]. Una vez que se tienen los datos experimentales es necesario pasarlos a través del programa de identificación del motor (ver [10]) para que estime las relaciones de parámetros del motor, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{J_0} &= 1,6949 \\ \frac{k_m}{J_0} &= 1159,1 \\ \frac{k_e}{L_a} &= 4,0343 \\ \frac{R_a}{L_a} &= 94,35 \\ \frac{1}{L_a} &= 9,7614 \end{aligned} \quad (12)$$

Para encontrar los seis parámetros físicos del motor es necesario resolver estas cinco ecuaciones (ecs. (12)). L_a , R_a y k_e se obtienen de las tres últimas ecuaciones fácilmente. Al proponer $k_m = 0,4 \frac{N-m}{Amp}$ como lo indica la hoja de datos del motor, se pueden obtener J_0 y b_0 de las 2 primeras ecuaciones, así

$$L_a = 102,44\text{mH} \quad (13)$$

$$R_a = 9,665\Omega$$

$$k_e = 0,4133 \frac{\text{Volts}}{\text{rad} - \text{seg}}$$

$$k_m = 0,4\text{Nm}$$

$$J_0 = 3,45\text{e} - 4\text{Nms}^2$$

$$b_0 = 5,85\text{e} - 4\text{Nms}$$

Estos parámetros dan una convergencia entre los resultados experimentales y el modelo identificado con una aproximación de 86,45 % para la posición, de 95,22 % para la velocidad y de 80,79 % para la corriente de armadura del motor , como se observa en la Figura 7, además estos parámetros tienen un valor muy parecido con los de la hoja de datos (Tabla 3.1), por lo que podemos confiar en que la identificación es buena.

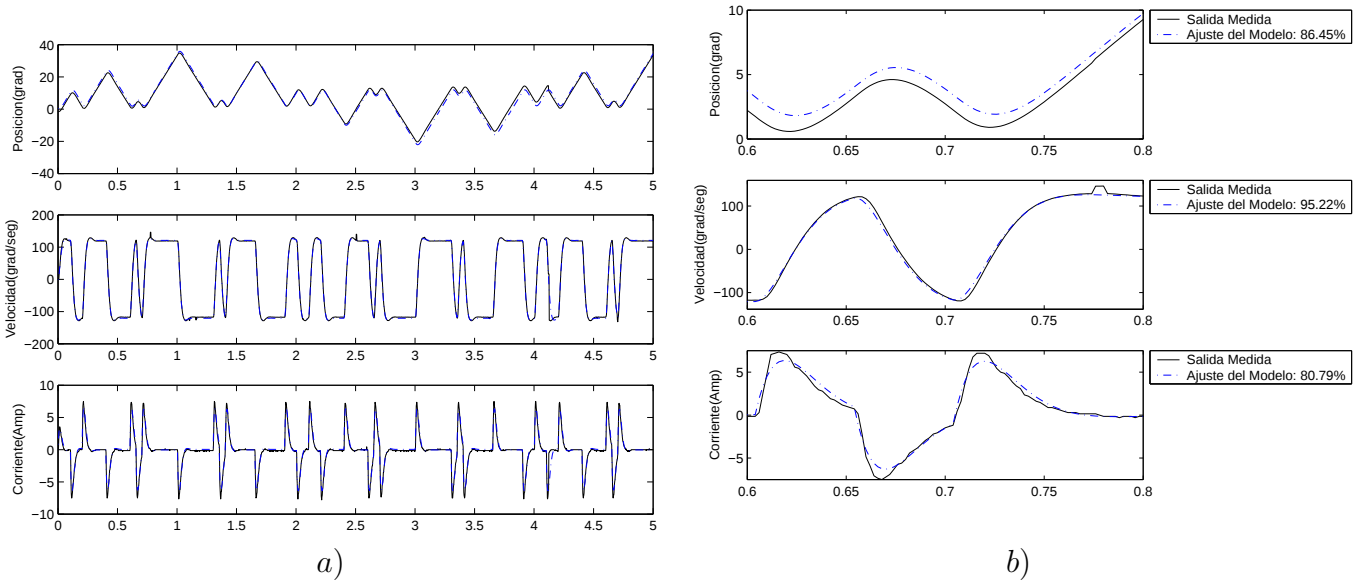


Figura 7: a) Se comparan las salidas medidas experimentalmente con las salidas del modelo estimado. b) Acercamiento en el intervalo de tiempo 0.6 a 0.8 segundos de la gráfica a).

3.3. Acoplamiento Pendubot-Motor

Al acoplar el modelo del motor (ec. (8)) al modelo del pendubot (ec. (4)), el sistema aumenta en un estado. El acoplamiento pendubot-motor (P-M) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} &= (D(q) + \bar{J}_o)^{-1} \left(\begin{bmatrix} k_m i_a \\ 0 \end{bmatrix} - (C(q, \dot{q}) + \bar{b}_0) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - G(q) \right) \\ \dot{i}_a &= \frac{V_{in} - R_a i_a - k_e \dot{q}_1}{L_a} \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\bar{J}_o = \begin{bmatrix} J_o & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{b}_0 = \begin{bmatrix} b_o & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En representación de estados la ec. (14) tomaría la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{p-m}(x, u) = \dot{f}_{p-m}(x) + \dot{g}_{p-m}(x)u \\ y &= h_{p-m}(x) \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ i_a \end{bmatrix} \implies \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dot{i}_a \end{bmatrix}, u = V_{in} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_{p-m}(x) &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{D_{12}}{D_{22}(D_{11}+J_o)-D_{12}^2}(-\phi_2 - x_3 C_{21}) + \frac{D_{22}}{D_{22}(D_{11}+J_o)-D_{12}^2}(-\phi_1 - x_3(C_{11} + b_o) - x_4 C_{12} + x_5 k_m) \\ \frac{(D_{11}+J_o)}{D_{22}(D_{11}+J_o)-D_{12}^2}(-\phi_2 - x_3 C_{21}) - \frac{D_{12}}{D_{22}(D_{11}+J_o)-D_{12}^2}(-\phi_1 - x_3(C_{11} + b_o) - x_4 C_{12} + x_5 k_m) \\ -\frac{k_e x_3 + R_a x_5}{L_a} \end{bmatrix} \\ \dot{g}_{p-m}(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \\ h_{p-m}(x) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.4. Puntos de Equilibrio del P-M

$x = \bar{x}$ son los puntos de equilibrio del pendubot-motor (P-M) tal que $f_{p-m}(x, u) = 0$. En equilibrio $\dot{\bar{x}}_1 = \dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_3 = \dot{\bar{x}}_4 = \dot{\bar{x}}_5 = 0$ (derivadas y segundas derivadas iguales a cero) por lo que la ec. (15) queda de la forma:

$$\dot{f}_{p-m}(x) + \dot{g}_{p-m}(x)u = 0$$

por lo que fácilmente se obtienen $\bar{x}_3$ y $\bar{x}_4$ de los estados $\dot{\bar{x}}_1, \dot{\bar{x}}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_4 \\ \dot{\bar{x}}_4 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Sustituyendo $\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0$ en el estado $\dot{\bar{x}}_3$

$$\dot{\bar{x}}_3 = -\frac{D_{12}}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2}(-\phi_2) + \frac{D_{22}}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2}(-\phi_1 + \bar{x}_5 k_m) = 0 \quad (19)$$

Simplificando la ec. (19) y agrupándola de manera conveniente se tiene:

$$\frac{D_{22}}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2} \left(\frac{D_{12}}{D_{22}} \phi_2 - \phi_1 + \bar{x}_5 k_m \right) = 0 \quad (20)$$

se observa en la ec. (20) que $\frac{\dot{D}_{22}}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2}$ nunca es cero, por lo que para que se cumpla esa ecuación se debe satisfacer:

$$\frac{D_{12}}{D_{22}} \phi_2 - \phi_1 + \bar{x}_5 k_m = 0 \quad (21)$$

como $D_{22} \neq 0$, la ec. (21) se puede escribir como:

$$D_{12} \phi_2 + (\bar{x}_5 k_m - \phi_1) D_{22} = 0 \quad (22)$$

Sustituyendo $\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0$ en el estado $\dot{\bar{x}}_4$

$$\dot{\bar{x}}_4 = \frac{(D_{11} + J_o)}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2}(-\phi_2) - \frac{D_{12}}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2}(-\phi_1 + \bar{x}_5 k_m) = 0 \quad (23)$$

Simplificando la ec. (23) y agrupándolo de manera conveniente se tiene:

$$-\frac{D_{12}}{D_{22}(D_{11} + J_o) - D_{12}^2} \left(\frac{D_{12}}{D_{22}} \phi_2 - \phi_1 + \bar{x}_5 k_m \right) - \frac{\phi_2}{D_{22}} = 0 \quad (24)$$

sustituyendo la ec. (21) en la ec. (24) se obtiene:

$$\phi_2(\bar{x}) = 0 \quad (25)$$

$$\Theta_5 g \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = 0 \quad (26)$$

De la ecuación (26) se obtiene la condición que se debe cumplir para obtener los puntos de equilibrio $\bar{x}_1, \bar{x}_2$:

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = n \left(\frac{\pi}{2} \right) \vee n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (27)$$

por lo que

$$\bar{x}_2 = n \left(\frac{\pi}{2} \right) - \bar{x}_1 \quad (28)$$

Sustituyendo la ec. (25) en la ec. (20) se obtiene $\bar{x}_1$.

$$(\bar{x}_5 k_m - \phi_1) D_{22} = 0$$

$$\bar{x}_5 = \frac{\phi_1(\bar{x})}{k_m} \quad (29)$$

$$\bar{x}_5 = \frac{\Theta_4 g \cos(\bar{x}_1) + \Theta_5 g \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}{k_m}$$

Sustituyendo la ec. (26) en la ec. (29)

$$\bar{x}_5 = \frac{\Theta_4 g \cos(\bar{x}_1)}{k_m}$$

de donde se obtiene $\bar{x}_1$

$$\bar{x}_1 = \pm \cos^{-1}\left(\frac{\bar{x}_5 k_m}{\Theta_4 g}\right) \quad (30)$$

Sustituyendo $\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0$ en el estado $\dot{\bar{x}}_5$ se obtiene $\dot{x}_5$

$$\dot{\bar{x}}_5 = -\frac{R_a \bar{x}_5}{L_a} + \frac{\bar{u}}{L_a} = 0 \quad (31)$$

por lo que

$$\bar{u} = \bar{x}_5 R_a \quad (32)$$

$$\bar{x}_5 = \frac{\bar{u}}{R_a} \quad (33)$$

Los puntos de equilibrio del Pendubot con el motor (P-M) están determinados por las ecs. (30), (28), (17), (18) y (33). Para $\bar{u} = 0$ el sistema P-M (6) tiene cuatro puntos de equilibrio, como se muestran en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6: Puntos de equilibrio del sistema P-M.

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0) \dots$	Eslabón 1 y 2 Arriba Posición Arriba
$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (-\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0, 0) \dots$	Eslabón 1 Abajo y 2 Arriba.
$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (\frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0, 0) \dots$	Eslabón 1 Arriba y 2 Abajo.
$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0) \dots$	Eslabón 1 y 2 Abajo. Posición Abajo

3.5. Linealización, Controlabilidad y Observabilidad del P-M

Existen varias propiedades en los modelos dinámicos de los sistemas que aseguran y permiten el diseño de controladores lineales, o en algunos casos imposibilitan su diseño. En esta sección se describen y se verifican dos propiedades al sistema P-M linealizado en el punto de equilibrio $\bar{x} = [\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0]$, con el propósito de diseñar un regulador cuadrático lineal (RCL) que estabilice los eslabones del pendubot en dicho punto de equilibrio.

3.5.1. Linealización

La aproximación en series de Taylor de las ecuaciones de movimiento del pendubot-motor (P-M) está dada por:

$$f_{\delta p-m}(x, u) = f_{\delta p-m}(\bar{x}, \bar{u}) + \left| \frac{\partial f_{p-m}(x, u)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x}) + \left| \frac{\partial f_{p-m}(x, u)}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u - \bar{u}) \quad (34)$$

Proponiendo el punto de equilibrio $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$ con $\bar{u} = 0$ y $f_{\delta p-m}(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, donde

$$\left| \frac{\partial f_{p-m}(x, u)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_5} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{5p-m}(x, u)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial f_{5p-m}(x, u)}{\partial x_5} \end{bmatrix} \right|_{x=\bar{x}}$$

$$\left| \frac{\partial f_{p-m}(x, u)}{\partial u} \right|_{u=\bar{u}} = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f_{5p-m}(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{x=\bar{x}}$$

Las derivadas $\frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f_{3p-m}(x, u)}{\partial x_5}$, $\frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f_{4p-m}(x, u)}{\partial x_5}$, $\frac{\partial f_{5p-m}(x, u)}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f_{5p-m}(x, u)}{\partial u}$ fueron obtenidas por medio de un programa en MatLab[®] (ver [10]).

De esta manera las ecuaciones de movimiento del P-M en forma linealizada quedan:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= Ax_\delta + Bu_\delta \\ y_\delta &= Cx_\delta \end{aligned} \tag{35}$$

en donde: $x_\delta = x - \bar{x}$, $u_\delta = u - \bar{u}$, $y_\delta = y - \bar{y}$,

$$A = \left| \frac{\partial f_{p-m}(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 48,0520 & -13,4769 & -0,01743 & 0 & 11,9183 \\ -47,9861 & 65,5774 & 0,03217 & 0 & -21,9975 \\ 0 & 0 & -4,0345 & 0 & -94,3479 \end{bmatrix}$$

$$B = \left| \frac{\partial f_{p-m}(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} \right|_{u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9,7618 \end{bmatrix}$$

$$C = \left| \frac{\partial h_{p-m}(\bar{x})}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con los siguientes parámetros estructurales del pendubot:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0,8436Kg \\
 m_2 &= 0,3860Kg \\
 l_1 &= 0,2032m \\
 l_2 &= 0,3556m \\
 lc_1 &= 0,1573m \\
 lc_2 &= 0,1417m \\
 I_1 &= 5,7974e - 3Kgm^2 \\
 I_2 &= 5,3914e - 3Kgm^2 \\
 g &= 9,78 \frac{m}{s^2}
 \end{aligned} \tag{36}$$

A partir de la aproximación lineal (35) se puede observar que para el punto de equilibrio $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$, los valores propios de la matriz A son 8,9617, 5,4177, -5,5234, -9,3902, -93,831, lo que indica que en ese punto de equilibrio el sistema P-M linealizado es inestable [6].

3.5.2. Controlabilidad

La ecuación de movimiento del P-M en forma linealizada (ec. (35)) es controlable si y solo si los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ son linealmente independientes (LI) o la matriz ϱ de $n \times n$ es de rango completo.

$$\varrho = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

donde n es el número de estados del sistema.

Para el punto de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$

$$\varrho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 116,34 & -10979. & 1,0387 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -214,74 & 20264. & -1,9212 \times 10^6 \\ 0 & 116,34 & -10979. & 1,0387 \times 10^6 & -9,7473 \times 10^7 \\ 0 & -214,74 & 20264. & -1,9212 \times 10^6 & 1,8028 \times 10^8 \\ 9,7618 & -921,01 & 86426. & -8,1098 \times 10^6 & 7,6095 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

El $\det(\varrho) = -2,1825 \times 10^{12}$ por lo tanto ϱ es de rango completo, por lo que el sistema P-M (ec. (35)) es controlable para ese punto de equilibrio.

3.5.3. Observabilidad

La ecuación de movimiento del P-M en forma linealizada (ec. (35)) es completamente observable si y solo si la matriz ϑ de $n \times nm$ es de rango completo o tiene n vectores columna linealmente independientes.

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

donde n y m son el número de estados y el número de entradas del sistema, respectivamente.

Para el punto de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4.0345 & 0 & -94.348 \\ 48.052 & -13.477 & -0,01743 & 0 & 11.918 \\ -47.986 & 65.577 & 0,03217 & 0 & -21.998 \\ -193.87 & 54.373 & 380.72 & 0 & 8853.4 \\ -0,83755 & 0,2349 & -3.2078 \times 10^{-2} & -13.477 & -1124.7 \\ 1.5458 & -0,43355 & 40.762 & 65.577 & 2075.8 \\ 18294. & -5130.9 & -35920. & 54.373 & -8.3077 \times 10^5 \\ 645.16 & -883.35 & 4536.2 & 0,2349 & 1.0641 \times 10^5 \\ -1188.1 & 3751,0 & -8371.9 & -0,43355 & -1.968 \times 10^5 \\ -1.7286 \times 10^6 & 4.8765 \times 10^5 & 3.3706 \times 10^6 & -5130.9 & 7.7952 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

el cual ϑ tiene rango completo ($rango = 5$), por lo que es observable.

3.6. Ley de Control Lineal para el P-M

Una vez que se comprobó que el sistema P-M linealizado es controlable y observable en el punto de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$, se propone una ley de control lineal. Un regulador cuadrático lineal (RCL) es implementado, cuyo objetivo es el de estabilizar o mantener al sistema en el punto de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$.

El RCL obtiene los valores óptimos del vector K_δ (ganancias del controlador) que estabilizan los eslabones del pendubot en $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$

$$u_\delta = -K_\delta x_\delta$$

El RCL minimiza el siguiente índice de desempeño cuadrático [3]

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (y_\delta^T Q y_\delta + u_\delta^T R u_\delta) dt \quad (37)$$

para el sistema P-M linealizado

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= A x_\delta + B u_\delta \\ y_\delta &= C x_\delta \end{aligned} \quad (38)$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva y $R \geq 0$.

La selección de Q y R permiten ponderar la rapidez con que los estados x_δ y el control u_δ tienden a cero. La minimización del índice de desempeño conduce a la ecuación de Riccati. El desarrollo de esta teoría es encontrada en [7].

Por conveniencia, se utilizó la función " $lqrd(A, B, Q, R, T_m)$ " de MatLab[®] para calcular los valores óptimos de K_δ , cuyo programa se encuentra en [10]. Los argumentos que se le proporcionaron a la función " $lqrd$ " son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 48,0520 & -13,4769 & -0,01743 & 0 & 11,9183 \\ -47,9861 & 65,5774 & 0,03217 & 0 & -21,9975 \\ 0 & 0 & -4,0345 & 0 & -94,3479 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9,7618 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, R = 3, T_m = 5ms$$

donde T_m es el tiempo de muestreo, Q y R son las ponderaciones de minimización de los estados y de la señal de control respectivamente, se propusieron de tal manera que se minimizaran de igual forma los estados y R se propuso con una ponderación a un nivel inferior a Q .

Las ganancias K_δ óptimas para la ley de control lineal (RCL) $u_\delta = -K_\delta x_\delta$, que estabilizan al sistema P-M en el punto de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$ son:

$$K_{p-m_\delta} = [-403,5333 \quad -421,7918 \quad -91,8461 \quad -64,0117 \quad 2,9301] \text{ con } T_m = 5ms \quad (39)$$

Estas ganancias K_δ son utilizadas en los resultados experimentales.

3.7. Resultados Experimentales

Para obtener los resultados experimentales es necesario configurar el servo-amplificador del sistema para que opere en modo voltaje, establecer la ganancia de lazo y la de entrada de referencia a 1, incrementar al máximo el límite de corriente y corregir desvíos en las variables de entrada-salida (ver Sección 2.4.2). Además se debe de programar al "PC Timer Tools" como se ve en la Sección 2.5, para que realice un periodo de muestreo de $5ms$.

Uno de los problemas del sistema mostrado en la Sección 3 es el del balanceo del pendubot. El balanceo del pendubot consiste en llevar los eslabones de la posición de descanso o de equilibrio inestable $\bar{x} = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ a la posición de arriba o de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. En [4] se propone una ley de control bang-bang óptima en lazo abierto que hace que se balanceen los eslabones del Pendubot de la posición de descanso a la posición de arriba. Es así que se utiliza dicha ley de control para realizar el balanceo del Pendubot y se utiliza el controlador lineal cuadrático con las ganancias obtenidas en la sección 3.6 para estabilizarlo y mantenerlo en la posición de equilibrio inestable $\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Una vez que es aplicado el control en lazo abierto al motor del pendubot, es necesario cambiar la ley de control bang-bang de lazo abierto por un control en lazo cerrado que estabilice o mantenga los eslabones del Pendubot en la posición de arriba ($\bar{x} = [\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0]$). Este cambio en la ley de control se produce cuando los eslabones se encuentran cerca de la región de atracción del RCL, esto es, cuando el eslabón 1 tenga un error de posición ($x_1 - \bar{x}_1$) máximo de 10 grados ($0,087rad$) y el error de posición del eslabón 2 ($x_2 - \bar{x}_2$) sea a lo más de 20 grados ($0,218rad$). Esta región de atracción es tomada con base en pruebas experimentales.

En la Figura 8 se muestra el comportamiento para el balanceo del Pendubot propuesto en [4], el cual al implementarlo con el RCL le toma un tiempo mínimo de 0,89 segundos para hacer el balanceo. En ese instante, se cambia la ley de control con el propósito de mantener los eslabones en la posición de arriba o de equilibrio inestable $\bar{x} = [\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0]$.

Una cuestión de interés es que el voltaje máximo y mínimo para la señal de control bang-bang para el resultado experimental es de $\pm 40,5volts$ con una corriente nominal de $\pm 4,4Amps$ y para el caso de

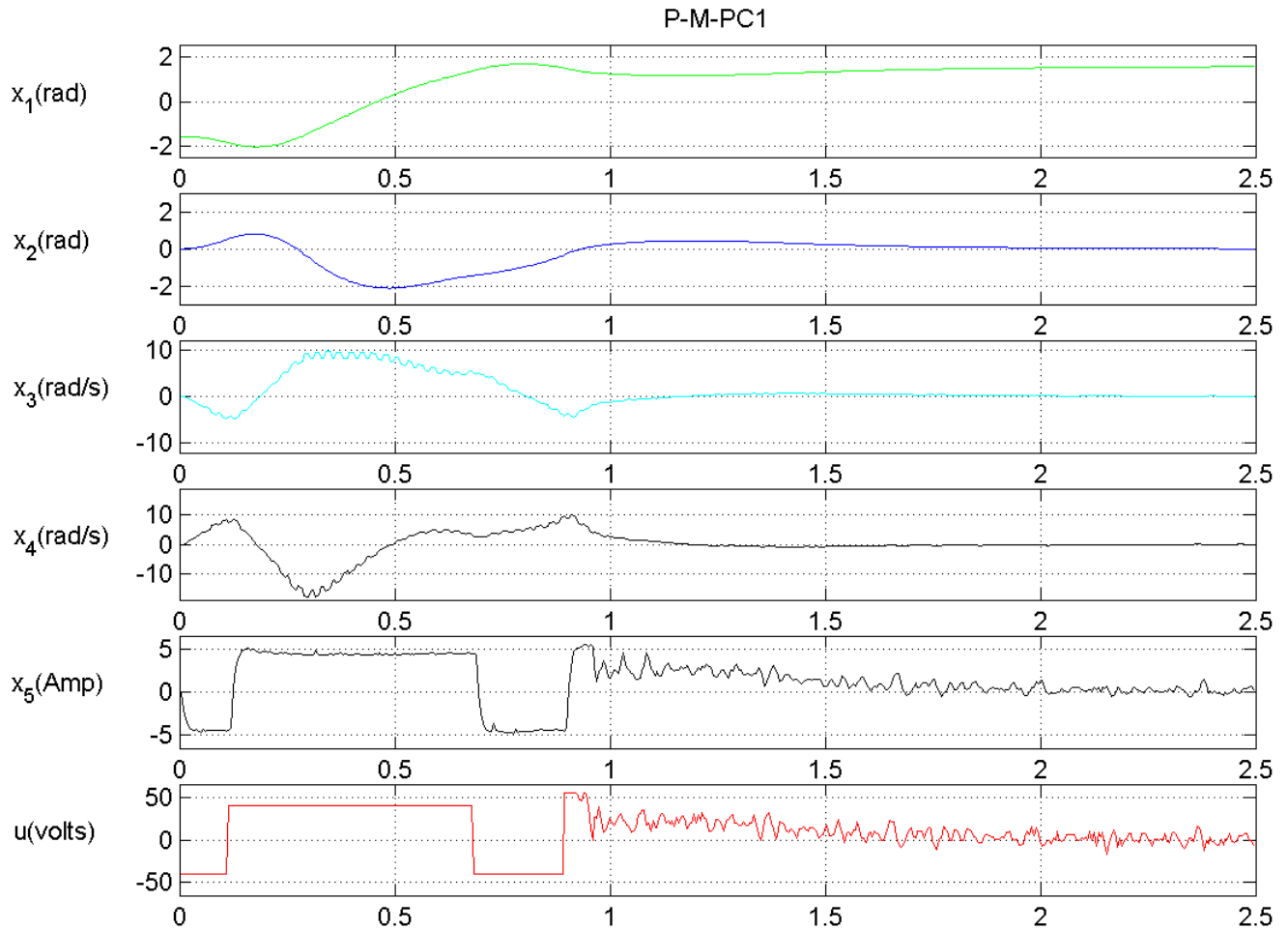


Figura 8: Resultados experimentales del balanceo y estabilización del Pendubot.

simulación fueron $\pm 45 \text{ volts}$ con una corriente nominal de $\pm 4,5 \text{ Amps}$; esto se debe a los ligeros errores del modelo estimado con los datos medidos del motor, especialmente en la corriente en la que hay una diferencia de aproximadamente 0,5 Amperes más en el modelo estimado que en los datos medidos como se ve en la Figura 7. En el instante de tiempo 0,9s se cambia la ley de control bang-bang por el RCL, teniendo un nivel de voltaje de 55 volts, aclarando que ese nivel de voltaje no corresponde al voltaje máximo de la señal de control bang-bang ($u_{\text{máx}} = 40 \text{ volts}$), como se muestra en el instante de tiempo 0,65.

4. Conclusión

En este trabajo se dan las características y/o formas de programar las partes que conforman al sistema (pendubot, sensores, actuadores, tarjetas electrónicas y PC). Se presentaron las ecuaciones de movimiento del Pendubot y las ecuaciones del motor que fueron acopladas a un modelo (pendubot-motor). El modelo P-M tiene los mismos puntos de equilibrio que el Pendubot[7].

Se linealizó el sistema P-M en un punto de equilibrio inestable de interés ($\bar{x} = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, 0)$), en el cual el sistema es inestable pero controlable y observable. Se desarrolló un RCL y se aplicó para mantener los eslabones en dicho punto de equilibrio.

Además se realizó la identificación de los parámetros del motor obteniendo una similitud con los tres

parámetros proporcionados en la hoja de datos del motor (k_m , k_e y R_a).

Para realizar el balanceo del pendubot se utilizó lo desarrollado en [4] y para estabilizarlo en la posición de equilibrio inestable se utilizó lo reportado en este trabajo. Los resultados experimentales concuerdan con los de simulación y se verifica la buena caracterización y modelado de cada componente del sistema.

Referencias

- [1] Arias Montiel, M. (2005). *Modelado dinámico e identificación de un sistema de transmisión de variación continua*. Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, CINVESTAV-IPN.
- [2] J. Block, D., *Mechanical design and control of the pendubot*, SAE Earthmoving Industry Conference, Peoria, IL, April 4-5, 1995.
- [3] Bryson Jr, A. E. (1999). *Dynamic optimization*. Addison Wesley.
- [4] Cruz-Villar, C. A., Alvarez-Gallegos, J. y Villarreal-Cervantes, M. G., *Concurrent redesign of an underactuated robot manipulator*, Mechatronics, Vol. 19, No. 2, pp. 178-182, 2009.
- [5] Fantoni, I. and Lozano, R. (2002). *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer-Verlag.
- [6] Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna*. Pearson-Educación.
- [7] Ramos Velasco, L. E. (1996). *Control de un sistema electromecánico subactuado (Pendubot)*. Tesis de Maestría. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Control Automático. CINVESTAV-IPN.
- [8] Rosas Flores, J. A. (2002). *Posicionamiento de un sistema mecánico subactuado mediante seguimiento de trayectorias óptimas*. Tesis de Doctorado, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, CINVESTAV-IPN.
- [9] Spong, M. W. and Vidyasagar, M., *Robot dynamics and control*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.
- [10] Villarreal-Cervantes, M. G. (2005). *Rediseño paramétrico del Pendubot para posicionamiento vertical en tiempo mínimo*. Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica, CINVESTAV-IPN.