

π Y EL GRAN PREMIO DE GLAUCO

Raúl López Muñoz, Ing.

Instituto Politécnico Nacional
CIDETEC

rlopezm1209@alumno.ipn.mx

Hace muchos años la comprensión del universo que nos rodea elevaba el status de hombre a dios, hoy en día la enorme cantidad de información nos ha convertido en invidentes que caminan con fe en aquello que se les dice que es verdad.

Introducción

En el presente trabajo se muestra una de las formas para obtener una aproximación de π empleando algunas de las herramientas más básicas y fundamentales de la matemática (álgebra, aritmética y geometría), pero más allá del método los siguientes párrafos representan una invitación a la reflexión y concientización del valor del conocimiento.

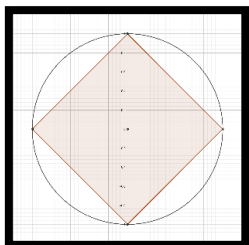
Contexto del problema

En la novela “El asesinato de Pitágoras” de Marcos Chicot [1] podemos encontrarnos en un punto en el cual el personaje Glauco, un poderoso adinerado, con la finalidad de evadir el sufrimiento por la pérdida del amor entra en un viaje tormentoso por la búsqueda del valor de π profundizando y perdiéndose en el mundo de las ideas, pero al no conseguir su objetivo decide dar gran parte de su fortuna (1500 kilogramos de oro) a aquella persona que le pueda dar una aproximación con al menos cuatro decimales del dichoso número.

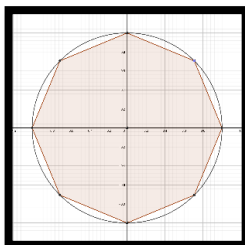
Considero que la mayoría de las personas que lean este artículo conocen que π tiene un valor aproximado de 3.1416, algunos habrán memorizado más decimales, pero continuamente me preguntó ¿Cuántas personas saben cómo obtenerlos?, así que ahora, a usted mi estimado lector le pregunto ¿Podría cobrar el premio?, no responda de manera apresurada pues aun no le he terminado de contar todo, para conseguir el premio Glauco exigía una demostración de la cifra dada y considerando que la novela nos sitúa en el año 510 a.C., olvídense de emplear cálculo integral y funciones trigonométricas, nuevamente pregunto ¿Podría cobrar el premio?

Aproximación por polígonos

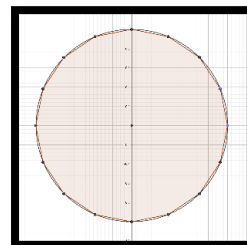
La idea de que un polígono regular con una gran cantidad de lados inscrito en un círculo es indistinguible del propio círculo (es decir no se puede diferenciar entre el polígono y el círculo) es muy recurrente al tratar de obtener el valor de Π , debido a que la relación entre el perímetro del polígono y del radio será aproximadamente la misma que la del perímetro del círculo y el radio; ahora el problema radica en cómo encontrar el perímetro de dicho polígono.



(A) Polígono de 4 lados.



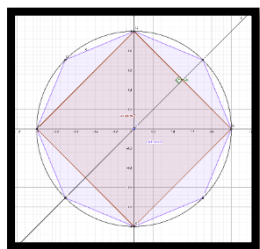
(B) Polígono de 8 lados.



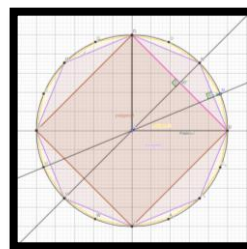
(C) Polígono de 16 lados.

Figura 1: Ejemplos de polígonos regulares inscritos.

Una técnica es partir de un polígono simple y duplicar el número de lados, esto se logra trazando una línea perpendicular a la mitad de cada lado y prolongarla hasta el punto donde corte la circunferencia, este punto será una arista del nuevo polígono.



(A) De 4 hasta 8 lados.



(B) De 4 hasta 16 lados.

Figura 2: Ejemplo de la técnica para duplicar el número de lados.

Gracias a esta construcción podemos emplear el bien conocido teorema de Pitágoras para determinar la medida de los lados que tendrán los siguientes polígonos.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

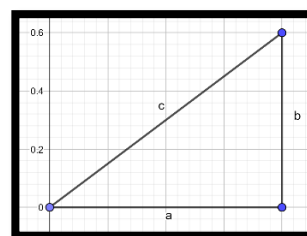


Figura 3: Triángulo rectángulo.

Para la demostración tomaremos como referencia la Figura 4.

Cada uno de los lados del primer polígono es la hipotenusa del triángulo mostrado en la Figura 4 y tiene el valor de $L_4 = \sqrt{2}r \cong 1.414213562r$, pues sus catetos tienen el valor de r .

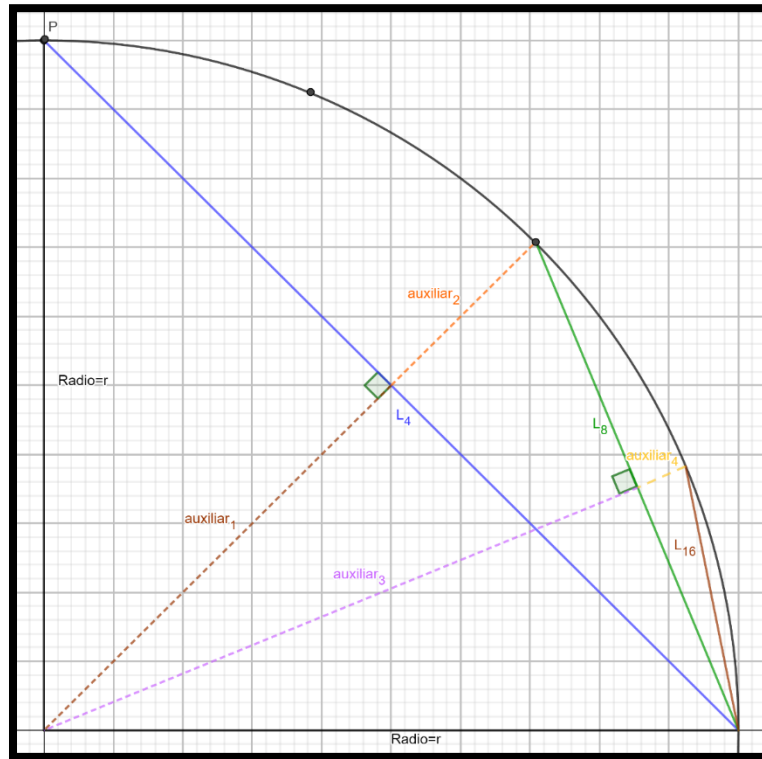


Figura 4: Vista de una cuarta parte del círculo con los segmentos de recta de interés.

El lado (L_8) es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son la mitad de L_4 y $auxiliar_2$, mediante observación tenemos que el valor de $auxiliar_2$ es el radio menos la $auxiliar_1$ que es uno de los catetos de otro triángulo rectángulo del que conocemos tanto la hipotenusa (el radio) y el valor del otro cateto (L_4). Por lo que haciendo cálculos algebraicos obtendremos el valor de uno de los lados de un octágono inscrito en el círculo.

$$\begin{aligned}
 L_8 &= \sqrt{\left(\frac{L_4}{2}\right)^2 + (auxiliar_2)^2} \\
 auxiliar_2 &= r - auxiliar_1 \\
 auxiliar_1 &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{L_4}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \\
 auxiliar_2 &= r - auxiliar_1 = r - \frac{r}{\sqrt{2}} \\
 L_8 &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2} + \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2} + r^2 - \frac{2r^2}{\sqrt{2}} + \frac{r^2}{2}} = \sqrt{2r^2 - \sqrt{2}r^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}r \\
 &\cong 0.7653668647r
 \end{aligned}$$

Para calcular el siguiente lado (L_{16}) se realiza el mismo proceso considerando las relaciones de los nuevos triángulos.

$$\begin{aligned}
 L_{16} &= \sqrt{\left(\frac{L_8}{2}\right)^2 + (\text{auxiliar}_4)^2} \\
 \text{auxiliar}_4 &= r - \text{auxiliar}_3 \\
 \text{auxiliar}_3 &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{L_8}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}r^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}r = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}r \\
 &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}r \\
 \text{auxiliar}_4 &= r - \text{auxiliar}_3 = r - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}r \\
 L_{16} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}r}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}r\right)^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}r^2 + r^2 - 2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}r^2 + \frac{2+\sqrt{2}}{4}r^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2+2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4}r^2 + r^2 - 2\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}r^2} = \sqrt{\frac{4}{4}r^2 + r^2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}r^2} \\
 &= \sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}r \cong 0.390180644r
 \end{aligned}$$

Si continuamos obtendremos las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 L_{32\text{LADOS}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}r \cong 0.1960342807r \\
 L_{64\text{LADOS}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}r \cong 0.09813534865r \\
 L_{128\text{LADOS}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}r \cong 0.04908245705r \\
 L_{256\text{LADOS}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}r \cong 0.02454307657r
 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente.

Si calculamos el perímetro y lo dividimos entre el diámetro ($D = 2r$) que es nuestra aproximación de Π , obtendremos los siguientes resultados.

Lados del polígono N	Longitud del lado L	Aproximación de $\Pi = \frac{LN}{2r}$
4	$1.414213562r$	2.828427125
8	$0.7653668647r$	3.061457459
16	$0.390180644r$	3.121445152
32	$0.1960342807r$	3.136548491
64	$0.09813534865r$	3.140331157
128	$0.04908245705r$	3.141277251
256	$0.02454307657r$	3.141513801

Podemos observar que conforme crece el número de lados del polígono, los primeros dígitos no cambian, así que ahora estamos capacitados para obtener cualquier cantidad de decimales de Π , en función de nuestra habilidad para el cálculo de raíces cuadradas, pero por tonelada y media de oro quizá valga la pena llenar varias hojas de decimales.

¿Qué sabe la comunidad estudiantil acerca de Π ?

Como se observa el procedimiento para obtener una buena aproximación de Π no es sencillo y por esta razón se debe valorar el esfuerzo de los matemáticos que trabajaron en él para brindarnos las tan conocidas aproximaciones de 3.14 o 3.1416, el mostrar este proceso debería servir para apasionar y concientizar al alumno sobre el conocimiento que recibe, además de ser un excelente ejemplo de la integración y aplicación del conocimiento de diversas ramas a un problema.

Se realizó una encuesta a 216 estudiantes de nivel superior (en una escuela que en su matrícula cuenta con aproximadamente 2400 estudiantes) en la que se realizaron preguntas relacionadas al número Π y se obtuvo la siguiente información.

Pregunta	Resultados
¿Cuál es la definición de Π ? / ¿De dónde viene Π ?	105 personas dijeron relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. 41 mencionaron saber que era un número. 69 respondieron que no sabían. 1 respondió que era una letra griega.
¿Cómo conoció al número Π ?	165 personas lo conocieron en su educación primaria. 47 personas lo conocieron en su educación secundaria. 4 no recuerdan.
¿Cuántos decimales sabe de memoria del número Π ? Enúncielos.	8 personas mencionaron 2 decimales. 99 personas mencionaron 4 decimales. 73 personas mencionaron 5 decimales. 34 personas mencionaron 6 decimales. 2 personas mencionaron 8 decimales.
¿Conoce uno o varios métodos para calcular más decimales Π ? En	2 personas mencionaron saber de la existencia de series que convergen a una expresión con Π , por lo que

caso de que la respuesta sea afirmativa enuncie los métodos o descríbalos brevemente.	despejando y calculando varios términos pueden obtener más decimales. 7 personas mencionaron conocer el método de polígonos (el expuesto en este trabajo). El resto afirmaron no conocer ningún método.
Suponiendo que desconoce la fórmula del área de un círculo (Πr^2), ¿Cree que podría calcular el área de un círculo? En caso de que la respuesta sea afirmativa explique brevemente como.	12 personas mencionaron hacer uso de cálculo integral y la descripción geométrica del círculo. 28 propusieron emplear una figura pequeña y ver cuantas veces puede caber en el círculo. 1 mencionó partir de un volumen líquido conocido, verterlo en un recipiente cilíndrico y dividir la altura que ocupaba el líquido. El resto afirmó que sería incapaz de obtenerla.

De los resultados obtenidos 105 personas (48.61%) conocen la definición de Π y en contraste 208 (96.29%) son capaces de mencionar 4 o más decimales del número en cuestión pero la gran mayoría de ellos no ha considerado dentro de su interés la oportunidad de indagar en el desarrollo de dónde o cómo se obtienen dichas cifras pese a saber de su existencia desde la educación básica pues solo 9 de los encuestados (4.16%) en sus respuestas mostraron tener noción de algunas de las formas para obtenerlos.

Conclusión

Un problema en la enseñanza de hoy en día es la formación en la que se ha dejado de cuestionar, de dudar en las afirmaciones brindadas por los docentes; el fomento a la curiosidad sobre el mundo que nos rodea ha sido enterrado para dar paso a la glorificación de la sumisión, a recibir información e imitar procesos de manera mecánica sin comprender la lógica que hay detrás. Por ello considero que una buena práctica docente en todo nivel es verificar y reafirmar los conocimientos de los estudiantes antes de seguir construyendo nuevas ideas sostenidas en poco más que la neblina de la memoria, además de mostrar el origen de lo que se esta enseñando como formación cultural y medio de inspiración.

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Magdalena Marciano Melchor quien me apoyo con la elaboración de este trabajo motivándome y brindado ideas para la adecuada exposición del mismo, también agradezco al CIDETEC tanto como al CONACYT por el apoyo brindado para continuar mi formación como profesionista.

Referencias

- [1] Chicot, M (2013) El asesinato de Pitágoras. Ed. Duomo Ediciones.
- [2] Baldor, Aurelio (2008) Geometría y Trigonometría de Baldor. Ed. Patria.
- [3] GeoGebra Clásico (6.0.529) [Software]. Recuperado de <https://www.geogebra.org/download>.