

ANÁLISIS TOPOLÓGICO DEL ESPACIO DE CONFIGURACIONES DE UN BRAZO ROBOT DE CUATRO ENLACES

González Moreno María del
Refugio
Gutiérrez Mejía Bárbara Mayela,
Dra.

Abarca Jiménez Griselda Stephany,
Dra.
Mares Carreño Jesús, M. en I.
César Eduardo Cea Montúfar, M. en
I.

IPN
UPIITA

mgonzalez1602@alumno.ipn.mx
jmaresc@ipn.mx

gabarcaj@ipn.mx
ccea@ipn.mx

bgutierrezm@ipn.mx

RESUMEN

En este artículo presentamos el análisis topológico del espacio de configuraciones de un brazo robot plano con cuatro enlaces, descrito en (Farber, 2000). El objetivo de este artículo es explicar con términos más cercanos a la ingeniería el análisis presente en (Farber, 2000). Dicho estudio se hace en el marco de la topología robótica, una reciente disciplina de las matemáticas que estudia problemas de la ingeniería con herramienta de la topología algebraica.

Palabras clave: espacio de configuraciones, enlaces, topología robótica, brazo robot.

Introducción

La topología robótica es una reciente disciplina en matemáticas que estudia problemas de la ingeniería con herramienta de la topología algebraica. Dicha disciplina fue introducida por Michael Farber en su artículo en el 2000 (Farber, 2000).

En su libro “Invitation to topological robotics” (Farber, 2000). Farber hace uso de matemáticas simples para analizar, entre otras cosas, el espacio de configuraciones de un brazo robot plano con cuatro enlaces. De este modo, el objetivo de este artículo se centra en explicar en términos más sencillos lo ahí expuesto con el fin de que las matemáticas y el lenguaje presentes en ese trabajo sean más cercanos a la ingeniería.

Existen diversos sistemas mecánicos de interés desde el punto de vista de las matemáticas. El sistema mecánico del que hablaremos en este artículo es el de brazo robot, conocido así puesto que el sistema mecánico contiene articulaciones que permiten movimientos como el brazo humano. En particular centraremos nuestra atención en un brazo robot plano de Boletín UPIITA (septiembre - octubre, 2019). Año 14, no. 74. ISSN 2007-6150.

cuatro enlaces, en donde cada enlace se mueve libremente en un círculo.

Dado S un sistema mecánico, entenderemos el espacio de configuraciones de S , como el espacio de todos los posibles estados de S . En nuestro caso, S será el mecanismo plano

simple de cuatro barras conectadas por juntas giratorias que forman una cadena poligonal cerrada, ver Figura 1, a lo que también llamaremos: brazo robot de 4 enlaces. Así pues, podemos pensar que estudiaremos a una gráfica cerrada (o polígono) con vértices

A , B , C y D . Denotaremos por ML el espacio de configuraciones de este sistema, donde $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ es el vector longitud de nuestro sistema, es decir, el vector que tiene en cada una de sus entradas la longitud de cada enlace en el brazo robot. En otras palabras, cada punto de ML (pensado como un espacio) representa una configuración particular de nuestro brazo robot. Para simplificar el análisis, consideraremos la siguiente condición:

$$L_1 \geq L_2 \geq L_3 \geq L_4.$$

Asumiremos que nuestro mecanismo está en el plano cartesiano y que el segmento $\overline{AD}$ será un segmento fijo y horizontal.

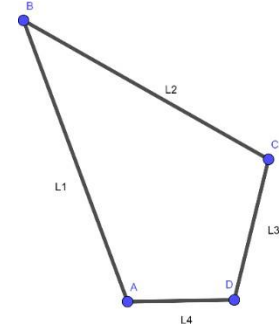


Figura 1: Mecanismo plano de cuatro barras.

Desarrollo

Empezaremos notando que basta con que entendamos la posición del vértice C, ver Figura 1, en otras palabras, la posición del vértice C estará relacionada con alguna configuración de nuestro brazo robot. Así pues, si analizamos los enlaces $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ entonces el vértice C debe estar en el anillo centrado en el punto A con radio exterior (R) y un radio interior (r), dados por:

$$R = L_1 + L_2 \quad (\text{ec.1})$$

$$r = L_1 - L_2 > 0 \quad (\text{ec.2})$$

Ver Figura 2. Dicho anillo será denotado por W.

A continuación, analizaremos cinco diferentes casos (de acuerdo con las condiciones impuestas en los enlaces de nuestro brazo robot) que quedan expuestos en la Figura 3. A grosso modo, la conclusión de nuestro análisis en cada caso versará sobre el entendimiento de la intersección de dos objetos geométricos y su interpretación en el sistema que estamos analizando. Para aterrizar ideas y con el fin de que la exposición sea más amena al lector, se elegirán vectores longitud de muestra con las restricciones previamente acordadas.

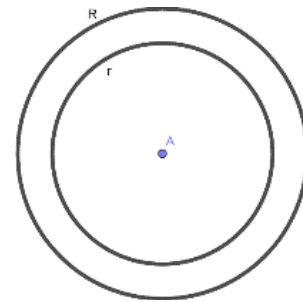
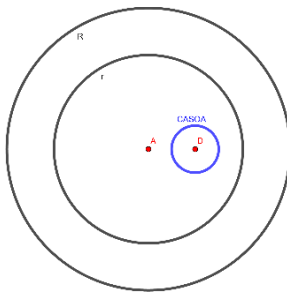


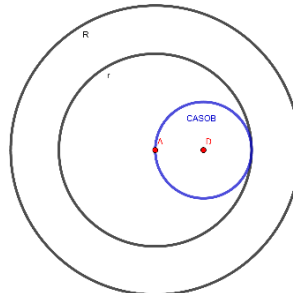
Figura 2: Anillo plano que forma el espacio de trabajo W y está centrado en A.



Caso A

$$L_3 + L_4 < r$$

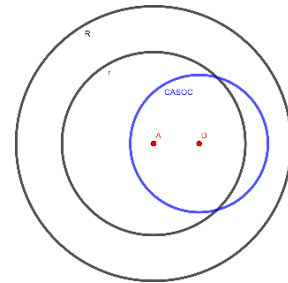
$$M_L = \emptyset \text{ vacío}$$



Caso B

$$L_3 + L_4 = r$$

$$M_L = \text{un solo punto}$$



Caso C

$$L_3 + L_4 > r, \quad L_3 - L_4 < r$$

$$M_L = S^1$$

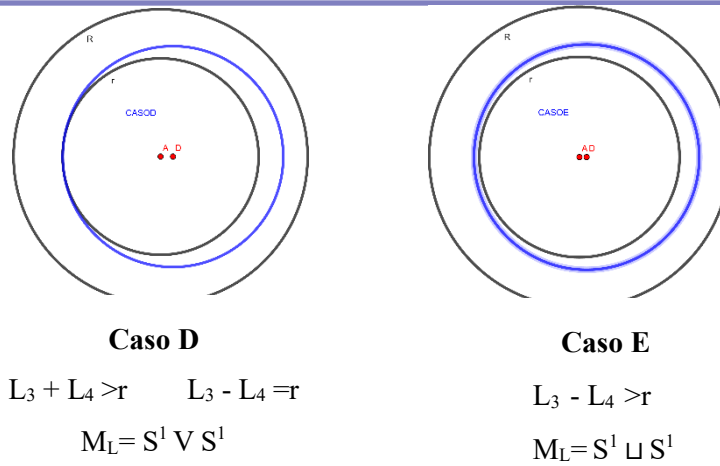


Figura 3: Representación gráfica del espacio de configuraciones M_L según diferentes restricciones

En cada caso de la Figura 3, el anillo presente será el anillo W descrito anteriormente y el círculo azul representa un círculo centrado en el vértice D de radio L_3 , de este modo, note que de acuerdo a nuestro análisis anterior, el vértice C tiene que caer en W (si estudiamos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$) y también tiene que estar en el círculo azul (estudiando los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$). En otras palabras, entender el espacio de configuraciones M_L se reduce a entender como se intersectan dos objetos geométricos, a saber, un anillo y un círculo y su interpretación en los objetos bajo estudio.

Es importante notar que cada punto en el interior del disco W (la parte interna del anillo sin contar a los círculos de radios r y R , respectivamente) corresponde a dos configuraciones distintas, como se muestra en la Figura 4:

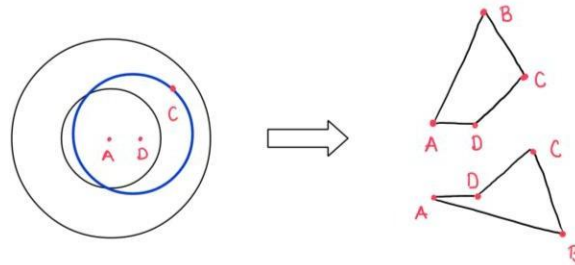


Figura 4: Cada punto C dentro de W , corresponde con dos configuraciones distintas del brazo robot

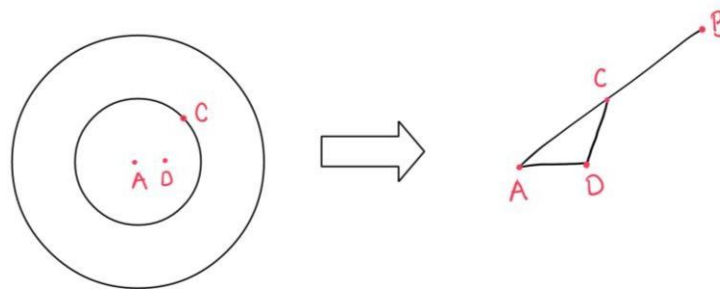


Figura 5: Cada punto de C en la frontera de W corresponde con una única

configuración del brazo

Y los puntos en la frontera del disco, representan una única configuración.

Caso A: Supongamos $L_3 + L_4 < r$. Entonces el círculo en azul no intersectará al anillo W y por lo tanto, $M_L = \emptyset$. En otras palabras, no existe un punto C tal que C esté en W y esté en el círculo azul definido por la condición de este caso.

Caso B: Consideramos $L_3 + L_4 = r$. Entonces el círculo en azul y el anillo se intersectarán en un solo punto y por lo tanto el espacio M_L consiste de un solo punto.

Caso C: Asumimos que $L_3 + L_4 > r$, pero $L_3 - L_4 < r$. Entonces el círculo en azul interseca en el anillo W como en la imagen, en un arco. Así pues, según lo anterior, M_L se obtiene de dos copias de arco, pegadas en sus extremos inicial y final, es decir, M_L puede ser pensado como un círculo, $M_L = S^1$

Caso D: Asumimos que $L_3 + L_4 > r$, pero $L_3 - L_4 = r$. Entonces el anillo W y el círculo azul se intersectan como en la Fig. 3. Como cada punto de dentro del anillo representa dos configuraciones distintas, y los elementos de la frontera representan una sola configuración, tenemos que nuestro espacio de configuraciones resulta ser dos copias de un círculo pegados en un punto (a saber, la configuración representada por el punto de tangencia del círculo azul y el círculo de radio r), lo que en matemáticas se escribe, $M_L = S^1 \vee S^1$, donde el símbolo $\vee$ representa la unión, en este caso, de los círculos en un punto.

Caso E: Por último, sí, $L_3 - L_4 > r$. Entonces el espacio de configuraciones del enlace será la unión disjunta (no se tocan) de dos círculos $M_L = S^1 \sqcup S^1$

Configuraciones particulares

Para poder comprender y visualizar cada uno de los casos, asignamos valores a cada longitud, formando un vector muestra y graficamos de acuerdo con los resultados obtenidos.

En el Caso A asumimos $L_3 + L_4 < r$ buscamos unos valores que puedan satisfacer esta desigualdad, por lo tanto, sí:

$$L_1=5 \quad L_2=2 \quad L_3=1 \quad L_4=1$$

Configuraciones particulares

Para poder comprender y visualizar cada uno de los casos, asignamos valores a cada longitud, formando un vector muestra y graficamos de acuerdo con los resultados obtenidos.

En el Caso A asumimos $L_3 + L_4 < r$ buscamos unos valores que puedan satisfacer esta desigualdad, por lo tanto, sí:

$$L_1=5 \quad L_2=2 \quad L_3=1 \quad L_4=1$$

Primero calculamos los valores de los radios que conforman a W apoyándonos de las ec.1 y 2.

$$R = 7 \quad r = 3$$

Resolvemos la desigualdad:

$$L_3 + L_4 < r$$

$$1 + 1 < 3$$

$$2 < 3$$

Y como la desigualdad se cumple lo que se puede ver de manera gráfica está en la Figura 6.

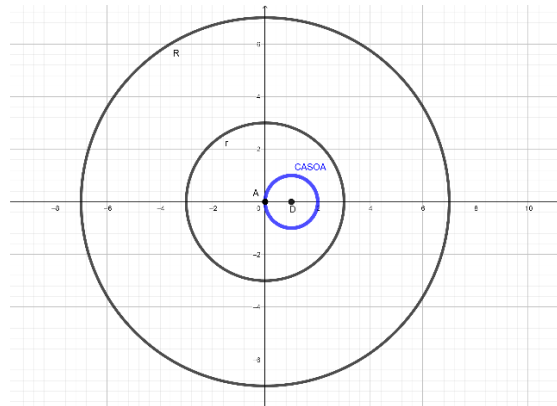


Figura 6: Representación gráfica del Caso A con el vector muestra (5,2,1,1).

Por lo tanto, ahí se observa claramente que el punto C nunca estará dentro de los radios que conforman al anillo, es decir el espacio de configuración del enlace será vacío, $M_L = \emptyset$

En el Caso B tenemos que si $L_3 + L_4 = r$ el círculo azul va a tocar en un punto el círculo con radio interno r que es donde tenemos nuestra máxima longitud, entonces los valores que pueden satisfacer condiciones son:

$$L_1=4 \quad L_2=2 \quad L_3=1 \quad L_4=1$$

$$R = 6 \quad r = 2$$

Resolviendo la desigualdad tenemos que:

$$L_3 + L_4 = r \quad 1 + 1 = 2$$

$$2 = 2$$

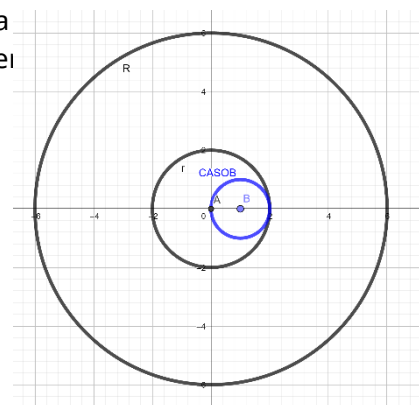


Figura 7: Representación gráfica del Caso B con el vector muestra (4,2,1,1).

En la Figura 7 se observa como el círculo en azul es tangente al anillo tocándolo en un solo punto.

En el Caso C se deben de cumplir dos condiciones la primera es que $L_3 + L_4 > r$ y la segunda que $L_3 - L_4 < r$, por lo tanto, si sabemos por el Caso B que cuando $L_3 + L_4 = r$ el círculo azul toca un punto en el anillo entonces en este caso va a estar dentro del espacio de trabajo W. Al asignar valores a las longitudes tenemos que:

$$L_1=3 \ L_2=2 \ L_3=1 \ L_4=1$$

$$R=5$$

$$r=1$$

$L_3 + L_4 > r$	$L_3 - L_4 < r$
$1 + 1 > 1$	$1 - 1 < 1$
$2 > 1$	$0 < 1$

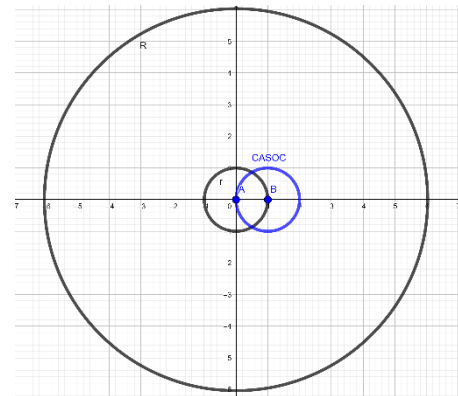


Figura 8: Representación gráfica del Caso C con el vector muestra (3,2,1,1).

Según la Figura 8 el espacio de configuraciones del enlace $M_I = S^1$ se va a obtener a partir de dos copias de arco pegados en sus extremos inicial y final.

En el caso D asumimos que $L_3 + L_4 > r$ y además que $L_3 - L_4 = r$. De acuerdo con los casos anteriores sabemos que por la primera desigualdad el círculo en azul va a estar entre los dos radios del anillo, pero ¿Qué pasará cuando la diferencia entre L_3 y L_4 es igual a r ?

De igual forma se les asignaron valores a las longitudes y estos fueron los resultados:

$$L_1=3 \ L_2=2 \ L_3=2 \ L_4=1$$

En seguida resolvemos las desigualdades para verificar que se cumplen las dos desigualdades.

$$R = 5 \quad r = 1$$

$$L_3 + L_4 > r$$

$$2 + 1 > 1$$

$$3 > 1$$

$$L_3 - L_4 = r$$

$$2 - 1 = 1$$

$$1 = 1$$

Como se observa en la Figura 9 cuando la diferencia entre L_3 y L_4 es igual a r entonces el círculo en azul toca un punto del radio interior del anillo y el cual es tangente a este.

En el caso E analizamos el último caso que es cuando $L_3 - L_4 > r$ se le dio un valor a cada longitud y resolvimos.

$$L_1=4 \quad L_2=3 \quad L_3=3 \quad L_4=1$$

$$r = 1$$

$$L_3 - L_4 > r$$

$$R = 7$$

$$3 - 1 > 1$$

$$2 > 1$$

Lo que se forma según la Figura 10 es el espacio de configuraciones formado por la unión de dos círculos que no se tocan.

Conclusiones

Se puede observar como el uso de otras herramientas facilita estudiar aspectos de un problema previamente abordado, en este caso, como el uso de herramientas topológicas ayuda a entender el espacio de configuraciones deseado.

Es de importancia establecer un puente de comunicación entre las matemáticas aparentemente abstractas y la ingeniería.

Restaría entender como estas herramientas nos pueden ayudar en el estudio del espacio de configuraciones de brazos con más enlaces, así como también, estudiar espacios de configuraciones de otros sistemas mecánicos.

Referencias

Farber, M. (2000). Invitation to Topological Robotics. Suiza: European Mathematical Society.

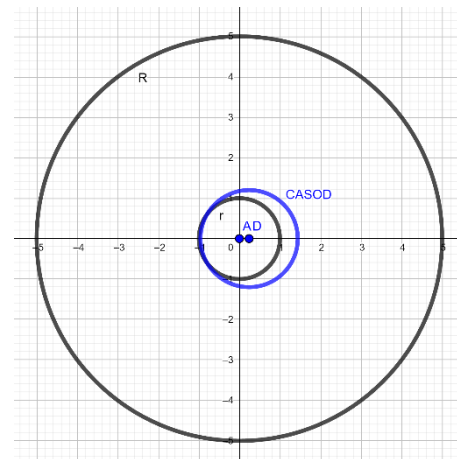


Figura 9: Representación gráfica del Caso D con el vector muestra (2,2,2,1).

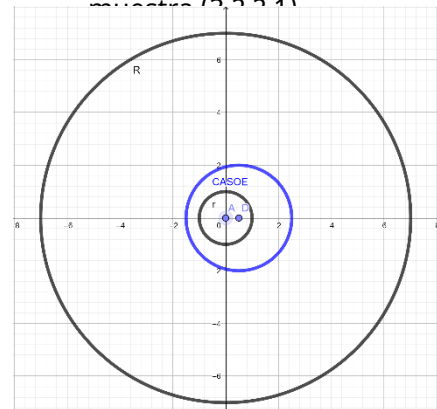


Figura 10: Representación gráfica del Caso E con el vector muestra (4,3,3,1).