

LA OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL Y SUS APLICACIONES

Jesús Mares Carreño, M. en I.
Enrique Ruby Becerra Montero, Dr.
Joel De Lucio Sánchez

Griselda Stephany Abarca Jiménez, Dra.
Martín Fernando Sosa Rojas
Liliana Alejandra Roa Cabrera

Instituto Politécnico Nacional
UPIIH

jmaresc@ipn.mx

gabarcaj@ipn.mx

Resumen

En el presente trabajo se presenta una revisión de lo que es la optimización estructural y la importancia de su aplicación en las distintas áreas de la ingeniería. Se presenta una clasificación de los métodos de aplicación según la naturaleza del algoritmo y se repasan los tres principales modos optimización estructural (de forma, paramétrica y topológica) según el tipo de manipulación de la pieza o estructura a optimizar. Se destacan diversas aplicaciones de los distintos métodos de optimización estructural en varias disciplinas de la ingeniería; tales como la automotriz, civil e incluso militar, mostrando la versatilidad de los métodos optimización estructural.

I. Introducción

Las técnicas de optimización y la ingeniería siempre han ido de la mano por la importancia que tiene el mejorar y hacer más eficiente el uso de los materiales sin comprometer las propiedades mecánicas del elemento. B, Hassani et al en el artículo [13], define a la optimización estructural como el proceso para encontrar la mejor estructura que cumpla con todos los requerimientos multidisciplinarios impuestos por la funcionalidad y condiciones de manufactura.

La industria aeroespacial y la industria automotriz, por ejemplo, aplican la optimización del tamaño y la forma al diseño de estructuras y elementos mecánicos. La optimización de forma también se usa en el diseño de dispositivos electromagnéticos, electroquímicos y acústicos [12].

Algunas aplicaciones en las que se han utilizado métodos de optimización son las siguientes:

- Problemas en dinámica. Problema relevante para el diseño de máquinas o estructuras en las que se involucren cargas dinámicas, en los que se busca maximizar o minimizar las eigenfrecuencias dependiendo de la aplicación.
- Problemas de pandeo. Para la maximización de la primera carga crítica de pandeo en una estructura.
- Limitaciones de esfuerzo. Se consideran distintos criterios para poder resolver y proponer problemas de estructuras dado un valor de esfuerzo definido.
- Cargas de presión. Son problemas comunes en los que se busca minimizar los parámetros de diseño como las densidades del material volumétrico a través de todo el diseño. El problema radica en cómo se considera el tipo de carga cuando los dominios de la superficie están sujetos fuerzas que cambian en tamaño, dirección y tamaño debida a la distribución del material. Ejemplos de estas son las presiones de algún fluido.
- Problemas geométricos no lineales. Son aquellos en los que se utiliza el análisis de elemento finito con geometrías no lineales para elementos como estructuras blandas, estructuras esbeltas o mecanismos.
- Mecanismos compatibles. Aquellas estructuras o mecanismos que están diseñados para ser flexibles y otorgar cierto grado permisible de movilidad sin utilizar piezas móviles. Se requiere un diseño que minimice el riesgo de fallo por fatiga.
- Diseño de soportes. Son los problemas en los que no se requieren diseños por distribución de material; sino que se diseña y se analiza, la cantidad de soportes y su posición de ellos en una estructura.
- Diseño de materiales. Son problemas en los que se aplican ideas de la optimización topológica para diseñar la estructura de un material.

Se considera un problema de optimización estructural a aquel en el que dadas unas condiciones racionalmente establecidas se busca el mejor diseño estructural posible, con un conjunto de restricciones y objetivo definidos.

Muy comúnmente, cuando se quiere optimizar el diseño, parámetros como las dimensiones, geometría o las propiedades del material son las variables para modificar. El objetivo es encontrar el mínimo (o máximo) de una función que obedece a algunas restricciones; esta

función puede ser el peso de la estructura o elemento. Las limitaciones o restricciones pueden ser geométricas como longitudes o de comportamiento como serían el desplazamiento, esfuerzo o frecuencias naturales [13].

II. Métodos de optimización estructural

Basados en una suposición de continuidad de la configuración estructural durante un proceso de optimización en el que se define el tamaño óptimo del miembro estructural satisfaciendo al mismo tiempo requerimientos de diseño y restricciones impuestas. Existen dos enfoques en los métodos de optimización estructural [5], los cuales son:

II.1 Métodos incrementales

Son aquellos que hacen uso del cálculo de la derivada de una función objetivo $f(x)$; además de las restricciones, para determinar el óptimo de un grupo de posibilidades para una función específica. Se asume que la solución existe, es decir que en el problema y la función objetivo debe haber continuidad, ya que es el principio básico para poder encontrar un gradiente. Dada su naturaleza los métodos incrementales aseguran la obtención del óptimo. Algunos de los métodos incrementales más conocidos son:

- Optimización sin restricción y con restricción.
- Método de los Multiplicadores de Lagrange.
- Programación Lineal (LP) y Lineal Integral (ILP).
- Programación Secuencial Lineal (SLP) y No Lineal (NLP).
- Métodos de Homogeneización.
- Teoría de distribución Óptima"

II.2 Métodos heurísticos

Se considera que es un procedimiento para resolver un problema complejo de optimización mediante una aproximación intuitiva, en la que la estructura del problema se utiliza de forma inteligente para obtener una buena solución de manera eficiente.

Existe otra rama de los heurísticos llamada métodos meta-heurísticos, que proponen mejorar los resultados de optimización, recurriendo a algoritmos híbridos combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, evolución biológica y mecanismos estadísticos [19].

Es importante resaltar que los métodos heurísticos no garantizan encontrar una solución óptima; sin embargo, en principio determinan la mejor solución obtenida dentro del tiempo permitido. Siendo los más representativos:

- Simulación de Recocido (SA).
- Algoritmos Genéticos (GA).
- Crecimiento biológico (SKO).
- Optimización Estructural Evolutiva (ESO)."

III. Tipos de optimización estructural

En general se pueden distinguir tres tipos de optimización según las modificaciones realizadas a las estructuras, los cuales se describen a continuación.

III.1 Optimización de forma

También conocida como optimización geométrica, se enfoca en la parte externa de la estructura en la que la malla debe buscar adaptarse a una nueva geometría [2]. Su propósito es variar algunos contornos del modelo a ser diseñado a fin de mejorar su comportamiento mecánico como por ejemplo reducir altas concentraciones de esfuerzos que normalmente aparecen en las esquinas de las piezas o en aquellas zonas donde ocurren cambios bruscos en la forma de la sección (ver Figura 1) [3].

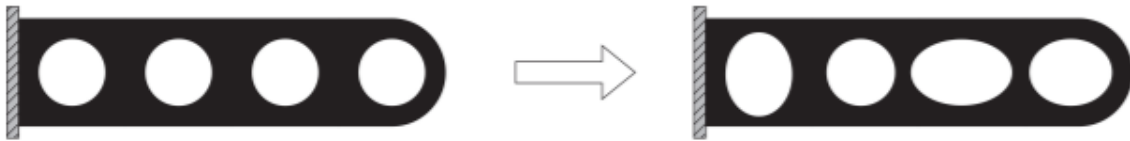


Figura 1. Optimización de forma. [1]

La utilización de métodos heurísticos para la optimización de forma es una práctica recurrente, de donde se destacan:

- **Método de optimización de forma mediante algoritmos evolutivos.** Este método consiste en lo siguiente [4]:

Primero se define el modelo mediante curvas B-Spline después se debe mallar el modelado de la pieza. Ya que se estableció el tipo de malla a utilizar, se debe determinar el esfuerzo de Von Mises en cada uno de los nodos a través de elemento finito. Después se debe modificar la pieza removiendo o adicionando material. Se denominan evolutivos porque se debe repetir este procedimiento las veces que sean necesarias hasta que ya no se pueda remover más material del diseño, mallando varias veces los diseños "evolucionados" o diferentes y determinando los esfuerzos de Von Mises de esos mismos diseños, todo esto para llegar al diseño óptimo.

En este artículo se utiliza este método en diversos casos de estudio muy comunes como el de un tubo enterrado que además está sometido a presiones internas, así como dos casos prácticos más evaluados por algoritmos evolutivos.

- **Método de optimización de forma utilizando algoritmos genéticos.** En el artículo [6] se detalla que:

Estos algoritmos tienen muchas ventajas sobre los métodos tradicionales de búsqueda. Entre otras consideraciones, no necesitan de información especializada de la función a optimizar (continuidad, gradientes) si no los valores de la función objetivo o de mérito. Esta información es usada para determinar el éxito o fracaso de un diseño en un ambiente en particular. Más aún su habilidad para encontrar la solución óptima o casi-óptima le confiere una posición privilegiada como una herramienta poderosa en problemas no convencionales de optimización.

Este es un método que facilita la integración y manipulación de las distintas fases del proceso de optimización es de los análisis más precisos capaz de resolver el problema inverso no lineal de optimización de formas. Sin embargo, requieren muchísimo poder computacional. [6]

III.2 Optimización paramétrica

También llamada de propiedades ya que solo depende de las dimensiones de la sección transversal (ver Figura 2) [2].



Figura 2. Optimización paramétrica. [1]

Este método en comparación con otros, para problemas no lineales requieren muy pocas evaluaciones y por lo tanto no requieren tanto poder computacional, haciendo menos costoso el análisis, además de que se considera un método de optimización estática debido a que “la solución es un conjunto de parámetros preestablecidos “estáticos” para todos los estados”, se menciona en el artículo [7] del Instituto Tecnológico Metropolitano, el cual utiliza este proceso para optimizar un panel utilizado en vehículos militares que previene el daño por explosiones. [7]

En [8] y [16], se mencionan distintos algoritmos posibles para poder utilizarlos cuando se intenta optimizar paramétricamente (size optimization). La metodología de optimización de tamaño procede con los siguientes pasos:

1. Al comienzo de la optimización, la geometría, los límites y las cargas de la estructura bajo investigación, tiene que ser definida.
2. También se seleccionan adecuadamente las variables de diseño, que pueden o no ser independientes entre sí.

3. Luego se realiza un análisis de elementos finitos y se evalúan los desplazamientos y tensiones.
4. Si se utiliza un optimizador basado en gradientes, entonces las sensibilidades de las restricciones y se calcula la función objetivo a pequeños cambios de las variables de diseño.
5. Se optimizan las variables de diseño. Si los criterios de convergencia para la optimización se satisfacen los algoritmos, entonces se ha encontrado la solución óptima y se termina el proceso, o de lo contrario el optimizador actualiza los valores de las variables de diseño y todo el proceso es repetido desde el paso 3. [16]

Algunos métodos destacados para la optimización paramétrica son:

- **Método de centros y formulación de fuerzas.** En [9] se menciona una aplicación del método de centros aplicado a una estructura articulada con soporte y se compara con resultados de otras literaturas. Se busca optimizar el peso ya que, usualmente, el peso es directamente proporcional al costo de la estructura [8].

La ventaja de este método es que se evita realizar análisis por separado, tiene mucha tolerancia a los puntos en los que comienza el análisis lo que causó una uniforme eficiencia de operaciones en todos los casos evaluados. Se observa también un decremento monótono en todos los casos evaluados, además de que el porcentaje de decremento del peso es notorio incluso en los primeros ciclos de operación. [9]

- **Método con algoritmo de simulación de recocido modificado.** Abreviado como MSAA (Modifed Simulated Annealing Algorithm) es un método relativamente nuevo y reciente descrito en [10], como un algoritmo más confiable, estable y eficiente que otros encontrados en los métodos metahurísticos y con modificaciones del ya existente Simulación de Recocido (SA).

Los resultados de aplicación apuntan a que el MSAA llega el valor óptimo para casi todos los casos en menor número de operaciones que otros algoritmos y demuestra ser un algoritmo que puede ser aplicado incluso a problemas más complejos de ingeniería [10].

III.3 Optimización topológica

La optimización topológica generalmente se emplea para lograr un diseño inicial aceptable de la estructura, que luego se refina con una herramienta de optimización de forma. El procedimiento de optimización de la topología avanza paso a paso con una "eliminación" gradual de pequeñas porciones de material sometido a bajos niveles de esfuerzo [16].

Es usualmente la más utilizada debido a que permite obtener la configuración deseada partiendo de una morfología inicial distante de la óptima [11].

La optimización topológica resulta más útil y conveniente sobre el método de optimización de forma debido a que éste último solo “permite cambios en la frontera del dominio”, lo cual limita mucho sus campos de aplicación; mientras el método topológico permite controlar el dominio de la estructura mediante huecos o cavidades, cambiando su densidad, para disminuir el peso y con ello los costos.

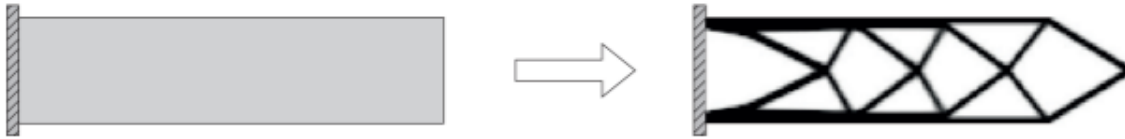


Figura 3. Optimización topológica. [1]

Los métodos adoptados para la optimización topológica se pueden dividir en los tres tipos que a continuación se enlistan [14]:

- **Algoritmos de criterio.** Obtienen la condición de optimalidad por el conocimiento perceptivo o la derivación racional. La configuración de topología óptima se obtiene mediante la satisfacción final de cálculos iterativos. El criterio racional se deriva generalmente mediante el método del multiplicador de Lagrange de la restricción de igualdad. El método de optimización estructural evolutiva (ESO por sus siglas en inglés) es el método de criterio típico.
- **Algoritmos de programación matemática.** Los algoritmos de programación matemática que se utilizan comúnmente en el modelo de optimización de topología estructural incluyen principalmente el SLP, el SQP, la programación convexa secuencial y el método secuencial de Lagrange aumentado. Estos métodos requieren un análisis de sensibilidad en cada iteración. Especialmente para sistemas a gran escala, la eficiencia de optimización es baja y costo del cálculo es alto.
- **Algoritmos inteligentes.** Los algoritmos comúnmente usados en la optimización topológica se tiene el GA, el SA o el método de enjambre de partículas. No es necesario establecer el modelo de optimización aproximado en estos algoritmos, el resultado óptimo se busca directamente en función de la variable de topología discreta, tampoco es necesario el análisis de sensibilidad.

Algunos métodos específicos usados para la optimización topológica son:

- **Método de homogeneización. Método de homogeneización.**
- **Métodos de sensibilidad topológica (derivada topológica).** Es un método alternativo de optimización topológica basado en el Análisis de Sensibilidad Topológica o Derivada Topológica. Esta familia de métodos apunta a resolver las limitaciones de los métodos basados en técnicas homogeneización, y su idea principal es la evaluación de la sensibilidad de una función dada ante la creación de una cavidad o hueco [11].
- **Método con la técnica de los autómatas celulares híbridos.** La formación de tableros de ajedrez hace referencia a regiones en la estructura final en las cuales se alternan elementos negros (sólidos) y blancos (vacíos). La dependencia de malla hace referencia

al hecho de obtener estructuras cualitativamente distintas para distintos tamaños en la malla del dominio del diseño. Los antes mencionados son problemas comunes en la optimización topológica, los cuales se pueden evitar usando la técnica de los autómatas celulares híbridos. Este se basa en un modelo fenomenológico para simular el proceso de adaptación funcional de la estructura ósea. “El diseño se discretiza en arreglos de autómatas celulares [...] en los huesos, cada autómata tiene la capacidad de capturar un estímulo mecánico y de comunicarse con los autómatas cercanos” [15]. Bajo la premisa de que en el remodelado óseo, los autómatas varían su estructura a su alrededor con procesos de formación y resorción de material, se utiliza esta técnica para la obtención de estructuras livianas y de máxima rigidez.

IV. Comparativa de los tipos de optimización estructural

En [18] se presenta una comparativa cuantitativa de los tres tipos de optimización estructural antes presentados, donde los tres son ejecutados con un algoritmo genético. En dicha comparativa se analizan 4 estructuras de celosía en análisis individuales, así como simultáneos. En la figura 4 se muestra un ejemplo de una estructura en celosía de 10 barras.

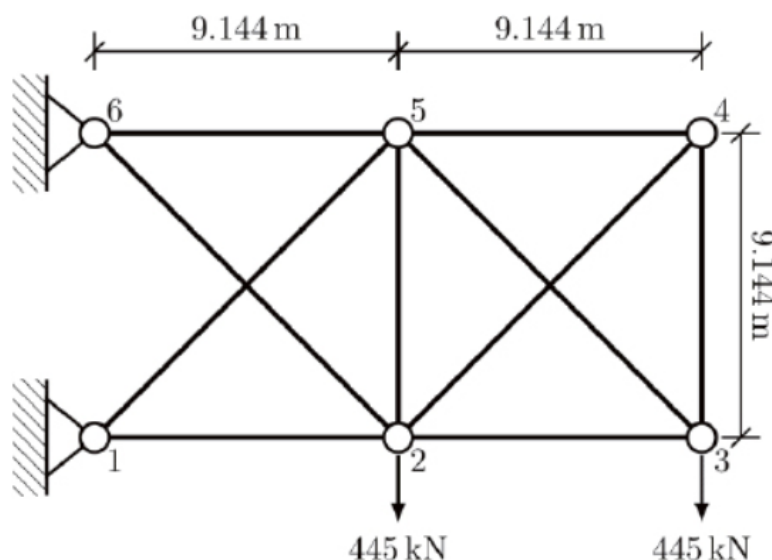


Figura 4. Estructura de 10 barras. [18]

Los parámetros que fueron utilizados en el estudio se muestran en la tabla 1, mientras que en la tabla dos se muestra la comparativa de resultados.

Tabla 1. Parámetros para análisis comparativo. [18]

Parámetro	Valor
Módulo de Young	68.95 GPa
Densidad del material	2768 kg/m ³
Estrés a tensión permisible	172.5 MPa
Estrés a tensión permisible	172.5 MPa
Desplazamiento permisible	50.8 mm

Tabla 2. Resultados para la estructura de 10 barras. [18]

Tipo de optimización	Tiempo (s)	Resultado (Kg)	Reducción (%)
Paramétrica	1.50	2490.56	60.9
Topológica	1.02	3735.37	41.3
De forma	1.16	5365.77	15.7
Topológica/Paramétrica	1.20	2507.98	60.7
Paramétrica/Topológica/Forma	1.31	2305.54	63.8
Topológica/Forma/Paramétrica	1.23	2383.88	62.6
Simultáneo	2.37	1230.24	80.7

Como se puede observar en la tabla 2, el mejor resultado es aquel en que se utilizan simultáneamente los métodos, con una reducción del 80.7 % en el peso, pero a un mayor costo computacional. La estructura obtenida por el proceso de optimización simultaneo se muestra en la figura 5.

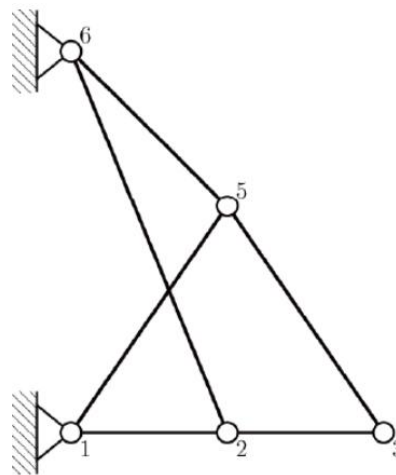


Figura 5. Resultado del proceso de optimización simultaneo en la estructura de 10 barras.
[18]

En esta sencilla estructura se observa claramente que los procesos de optimización que llevan a mejores resultados son aquellos en los que se combinan los tres tipos de optimización, ya que se obtiene la estructura más ligera lo que también reduce el costo de ella; aunque también incrementa el tiempo de la solución. Entre los procesos aplicados de forma individual, la

optimización paramétrica presenta mejores resultados, pero con mayor consumo de tiempo, mientras la optimización topológica presenta un mejor equilibrio entre reducción de masa y tiempo de cómputo.

V. Aplicaciones

Finalmente se presentan algunas aplicaciones prácticas de los procesos de optimización estructural.

V.1 Optimización estructural topológica por autómatas celulares híbridos

En [15] se utiliza este método para optimizar uno de los problemas más comunes dadas ciertas características de una estructura tipo Michell. Se utiliza el método topológico con el uso la técnica de los autómatas libres en la estructura de la figura 6.



Figura 6. Estructura de Michell a optimizar. [15]

En el algoritmo de los autómatas libres, la ley de evolución hace uso de una variable de diseño efectiva $\bar{x}_i(t)$ y de una variable de diseño efectiva $\bar{y}_i(t)$. Estos valores efectivos se determinan como el valor promedio en el vecindario del autómata. Esto es:

$$\bar{x}_i(t) = \frac{x_i(t) + \sum_{k=1}^{\hat{N}} x_k(t)}{\hat{N} + 1}$$

$$\bar{y}_i(t) = \frac{y_i(t) + \sum_{k=1}^{\hat{N}} y_k(t)}{\hat{N} + 1}$$

En este ejemplo se considera un área de 50 x 25 mm² como dominio de diseño, con un espesor de 1mm. El movimiento de la esquina inferior izquierda se encuentra completamente restringido, mientras que el movimiento de su esquina inferior derecha, se encuentra restringido solo en dirección vertical. Se tiene una fuerza vertical de 1000 N aplicada en medio del borde inferior. Las propiedades mecánicas del material isotrópico de la estructura son las correspondientes al material del hueso cortical, las cuales se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Parámetros del algoritmo [15]

Parámetro	Símbolo	Valor
Número de autómatas	N	50 x 25
Módulo de Young	E_0	20 GPa
Módulo de Poisson	ν_0	0.3
Penalización	P	3.0
Diseño inicial	$X_i(0)$	1.0
Coeficiente de peso	ω	0.25
Valor óptimo	y_i^*	1.8084 GPa
Vecindario	$\hat{N}$	8 (Moore)
Convergencia	ϵ	$2.5 \times 10^{-3} g$

La precisión de los diseños dependerá de un valor denominado como vecindario $\hat{N}$, y solo indica el número de autómatas adyacentes. Existen cuatro vecindarios muy comunes, los cuales se muestran a continuación.

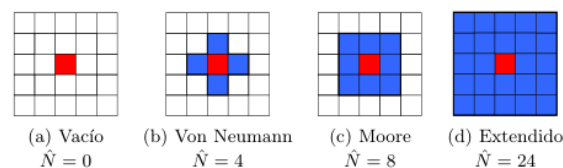


Figura 7. Vecindarios más comunes de los autómatas celulares. [15]

Con un $\hat{N} = 0$, el algoritmo converge en 23 iteraciones y muestra tableros de ajedrez (ver figura 8).



Figura 8. Se considera espacio vacío o $\hat{N} = 0$. [15]

En un segundo caso es considerado $\hat{N} = 8$, el algoritmo converge en 45 iteraciones y no se presentan tableros de ajedrez (ver figura 9).



Figura 9. Se considera vecindario de Moore o $\hat{N} = 8$. [15]

El algoritmo aplicado demuestra ser eficaz y eficiente numéricamente.

V.2 Optimización estructural topológica de viga en voladizo por homogeneización

Un problema muy común son las estructuras en voladizo que soportan cargas en diferentes ángulos en el extremo no fijo. En [13] se aborda el problema de la viga de la figura 10, donde los parámetros del problema son los de la tabla 4.

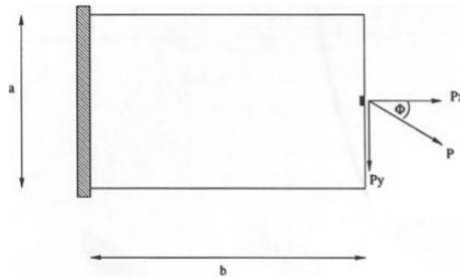


Figura 10. Diseño a optimizar de viga en voladizo. [13]

Los parámetros para este caso de estudio se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Parámetros del diseño [15]

Parámetro	Valor
Módulo elástico	1.0×10^5 Pa
Módulo de Poisson	0.3
a	10 m
b	16 m
Espesor (t)	1 m
Volumen del material de diseño	159.44

Haciendo uso del método de homogeneización se busca optimizar la densidad del material. Los resultados reportados, considerando que la carga se aplica a 90° , en el punto medio del extremo de la viga se muestran en la figura 11.

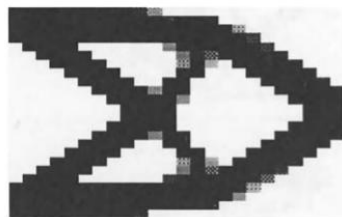


Figura 11. Primer resultado con carga a 90° . [13]

Este primer diseño optimizado, se alcanza en 200 iteraciones con una reducción en el volumen de 50.17%. Al variar el ángulo en el que se aplica la carga la estructura resultante también cambia. Algunos ejemplos de la estructura resultante respecto al ángulo de la carga se muestran en la figura 12.

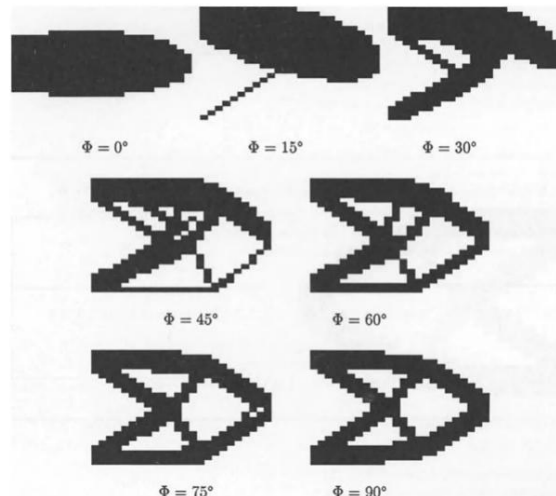


Figura 12. Casos con distintos ángulos en la carga. [13]

V.3 Optimización estructural de forma por algoritmos evolutivos

En [4], se muestran ejemplos con el método de optimización de forma con los algoritmos de optimización estructural evolutiva (ESO). Es uno de los métodos más comunes en el diseño del diámetro de tuberías, los autores implementan un método de optimización para obtener diseños de piezas mecánicas como placas con cavidades, bridas, tubos a presión etc., que permita obtener esfuerzos homogéneos y reduciendo el volumen de la pieza.

Uno de los casos presentados es el de un cuerpo de acero enterrado y al mismo tiempo, sometido a una presión interna de 110 MPa (ver figura 13). Se tiene una geometría circular con un diámetro externo de 4 cm. En el proceso de optimización se busca una distribución uniforme de esfuerzos.

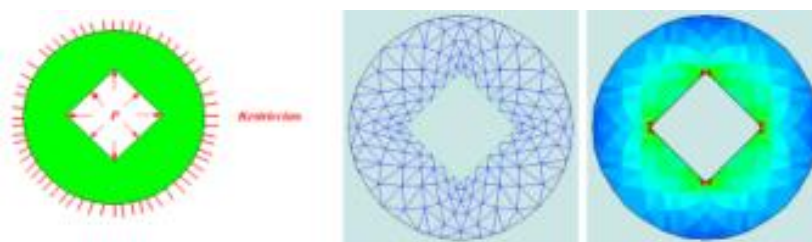


Figura 13. Diseño inicial de la tubería. [4]

Para el estudio se requiere un diseño con un factor de seguridad de 2 y se restringe el espesor de la pared a 1 cm. Se consideran tasas de remoción de material de 0.6 y una tasa de adición de material de 0.9 con incrementos de 0.01 para cada parámetro. El proceso se puede resumir en dos etapas, la primera consiste en la eliminación de concentradores y la segunda en la

optimización de dimensiones. En la figura 14 muestran los resultados después de cierto número de iteraciones.

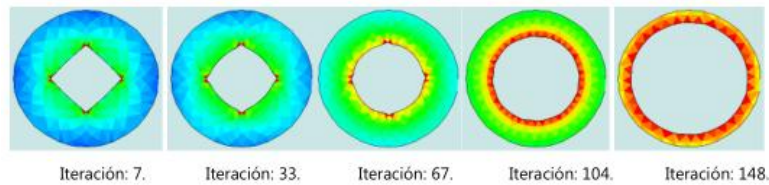


Figura 14. Evolución del diseño. [4]

En la iteración 140 se alcanza el 1.99 en el factor de seguridad establecido como parámetro al inicio del estudio (ver figura 15), por lo que se termina el proceso.

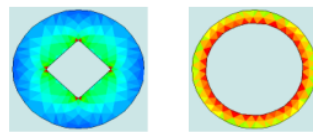


Figura 15. En la izquierda el diseño inicial, y en la derecha la iteración 140. [4]

El diseño inicial tenía un volumen de 105.367 cm^3 , mientras que en el diseño optimizado se obtiene un volumen de 49.727 cm^3 , lo que resultaría en una reducción en el volumen de 52.8%. Se concluye que se obtienen los dos objetivos al inicio del estudio, la homogeneización de los esfuerzos en la pieza y la reducción del volumen. Con algoritmos evolutivos se pueden realizar de manera sencilla y efectiva las optimizaciones de los diseños, haciendo esta técnica muy útil para métodos de optimización paramétrica.

VI. Conclusión

Se explicó la importancia de la optimización estructural para la mejora y la eficiencia en el uso de material y se pudo observar la versatilidad y su amplio campo de aplicación en distintas ramas de la ingeniería. Se identificaron los tipos de optimización estructural, así como los distintos métodos aplicables en cada uno de esos tipos, incluyendo métodos heurísticos y métodos incrementales, demostrando que no solo incluye métodos matemáticos o físicos, sino que, puede tomar algoritmos que necesariamente son de ingeniería como lo son los algoritmos de evolución biológica y los de métodos estadísticos.

Se mostraron ejemplos de distintas aplicaciones combinando varios métodos (matemáticos o intuitivos) en un solo tipo (forma, tamaño, topología) así como también la combinación, con un solo método, y varios de tipos de optimización. Estos ejemplos nos dejan en claro la infinidad de combinaciones de análisis entre tipo y método aplicables, dependiendo de la cantidad de precisión que se busque, el poder computacional con el que se dispone, así como las variables que se desconozcan en el problema.

VII. Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN) por su apoyo a través del proyecto SIP 20201159.

VIII. Referencias

- [1] Maza C. A. (2012). OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA EN EL DISEÑO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES MECÁNICOS. Proyecto de grado. Universidad Autónoma de Occidente. Santiago de Cali
- [2] Villegas O. D. (2013). OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL: Diseño Óptimo con Materiales Compuestos para Soporte de Suspensión de Vehículo Eléctrico. Tesis de maestría. UNAM. México DF.
- [3] Lozano, D. (2010). Optimización Estructural Evolutiva: Diseño de cavidades en Elementos Plano. Tesis de licenciatura, UNAM, México DF.
- [4] Lozano, D. et al. OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL DE FORMA EN EL DISEÑO DE CAVIDADES EN ELEMENTOS PLANOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS. Asociación Argentina de Mecánica Computacional. Argentina (2010).
- [5] Lozano, D. OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL: Diseño Mecánico Óptimo de Piezas para Inyección de Plástico. Tesis de Maestría, UNAM, México DF (2012).
- [7] H.K. A. OPTIMIZACIÓN PARAMÉTRICA. Instituto Tecnológico Metropolitano. (2019).
- [8] ErsilioT., & Niko L. (2017). A review of structural size optimization techniques applied in the engineering design. International Journal of Scientific & Engineering Research Volume 8. Issue 8.
- [9] Farshi, B., & Alinia-ziazi, A. (2010). Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation. International Journal of Solids and Structures, 47(18-19), 2508–2524.
- [10] Carlos Millan-Paramo, & João Elias Abdalla Filho. (2019). Size and Shape Optimization of Truss Structures with Natural Frequency Constraints Using Modified Simulated Annealing Algorithm. Arabian Journal for Science and Engineering.
- [11] Optimización topológica (2017). Recuperado: noviembre 18, 2020, de <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/4296/fichero/VolumenI%252F4.pdf>
- [12] M.P. Bends0e., & O. Sigmund. (2004). Topology Optimization. Springer.
- [13] Hassani, B., & Hinton, E. (1999). Homogenization and Structural Topology Optimization. Springer.

- [14] Sui, Y., & Peng, X. (2018). Exordium. Modelling, Solving and Application for Topology Optimization of Continuum Structures. 1–36.
- [15] Tovar, A. (2005). Optimización topológica con la técnica de los autómatas celulares híbridos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*.
- [16] Ch. Mitropoulou, C., G. Karlaftis, M. (2013). Metaheuristic Applications in Structures and Infrastructures.
- [17] Querin, O. M., Victoria, M., Alonso, C., Ansola, R., & Martí, P. (2017). Discrete Method of Structural Optimization * *Additional author for this chapter is Prof. Dr.-Ing. Dr.-Habil. George I. N. Rozvany. *Topology Design Methods for Structural Optimization*.
- [18] T.E. Müller., & E. van der Klashorst. (2017). A Quantitative Comparison Between Size, Shape, Topology and Simultaneous Optimization for Truss Structures. *Latin American Journal of Solids and Structures*. Rio de Janeiro.
- [19] Díaz López E., Martínez Prieto A., Gálvez Lio D. (2016). Una implementación de la meta-heurística “Optimización en Mallas Variables” en la arquitectura CUDA. *Rev cuba cienc informat vol.10 no.3*. La Habana